

Pierre Pellat-Finet  
Alberto Patiño  
Rafael Torres

# Del análisis armónico a la óptica de Fourier



Formando líderes para la  
construcción de un nuevo  
país en paz



ACREDITADA INSTITUCIONALMENTE  
*¡Seguimos avanzando!*



ISBN : 978-958-53581-2-6

Pierre Pellat-Finet  
Alberto Patiño Vanegas  
Rafael Torres Amaris

Del análisis armónico a la óptica  
de Fourier

## Prefacio

Del Análisis Armónico a la Óptica de Fourier, es el tipo de libro que el experto o iniciado en un tema de frontera del conocimiento desearía tener a la mano, por la manera como está estructurado; en este caso, sobre un novedoso método de interpretación de la propagación de la radiación electromagnética y sus aplicaciones al tratamiento de señales. Efectivamente, el libro está conceptualmente muy bien diseñado, de forma tal que permite al lector, experto o no, una ubicación rápida en la temática tanto analítica y conceptual, sin perder de vista la esencia del rigor matemático.

El libro es el resultado del Curso Avanzado de Óptica de Fourier, impartido entre marzo y abril de 2007 por el profesor Pierre Pellat-Finet, durante su estancia en la Universidad de Pamplona, en calidad de profesor visitante invitado; a éste asistieron profesores, estudiantes de Maestría en Física, de grado en física, matemáticas y de ingenierías. El curso y los resultados del mismo, dan cuenta de la primera misión de cooperación en el marco del convenio Universidad de Bretaña del Sur—Universidad de Pamplona, firmado en enero de 2007; en él, las dos instituciones deciden colaborar con el fin de profundizar y ampliar sus relaciones científicas y pedagógicas, y de profundizar en su cooperación para contribuir al desarrollo de la investigación y la enseñanza superior.

El convenio surge de la iniciativa del Grupo Óptica Moderna, prosélitos de la escuela Óptica Metaxial, quienes decidimos en agosto de 2005, conocer en detalle esta forma de estudiar la propagación de la radiación electromagnética, los secretos de su manipulación formal, así como también, conocer de primera mano las posibilidades reales de aplicación, y particularmente determinar y orientar convenientemente nuestras expectativas de investigación básica y aplicada en técnicas ópticas de cifrado, reconocimiento de patrones y metrología óptica, principalmente. Entonces, no podría ser mejor la oportunidad para este propósito que a través del vínculo con el profesor Pellat-Finet, discípulo cercano al inventor del método, el profesor Georges Bonnet.

En agosto de 2005 logramos el primer acercamiento de colaboración del profesor Pellat-Finet con el Grupo, profesor a quién profesó particular aprecio por su devota generosidad cuando se trata de atender el llamado de los interesados en escuchar sus ideas; infiero entonces, que debió ser el impulso por el cual aceptó la primera invitación, informal, que le hicéramos en aquel

## II Prefacio

*entonces, y que sin ningún tipo de exigencias, arribó a nuestra Universidad, para no en vano dejar una motivación que perdura, en quienes asistimos al primer curso corto que promocionamos con el título Principios de la Óptica Metaxial. Desde entonces, se oficializa la intención de cooperación académico-científica, la cual se cristalizó con la firma del convenio marco interinstitucional.*

*Finalmente, en nombre de la Universidad de Pamplona y del Grupo Óptica Moderna, agradezco al profesor Pellat-Finet, primero por aceptar convertirse en uno de nuestros más ilustres visitantes, segundo por compartirnos su saber para enriquecer el nuestro, y tercero por invitarme a que escribiera la reseña sobre este resultado de cooperación académico-científico.*

*Pamplona, Colombia,  
Enero de 2020*

*Jorge Enrique Rueda Parada  
Dir. Grupo Óptica Moderna  
Universidad de Pamplona*

# Contenido

Símbolos y notaciones .....	V
Introducción .....	1
<b>1. Transformación de Fourier</b> .....	<b>3</b>
1.1 Series de Fourier .....	3
1.2 Ejemplos .....	5
1.3 Definición de la transformación de Fourier .....	8
1.4 Propiedades de la transformación de Fourier .....	10
1.5 Ejemplos .....	12
<b>2. Convolución</b> .....	<b>15</b>
2.1 Un ejemplo .....	15
2.2 Definición y propiedades del producto de convolución .....	19
2.3 Convolución y transformación de Fourier .....	20
2.4 Ejemplo de aplicación .....	20
2.5 Filtros lineales .....	21
<b>3. Distribuciones</b> .....	<b>25</b>
3.1 Distribución de Dirac .....	25
3.2 Transformada de Fourier de las funciones senoidales .....	27
3.3 Distribución de Dirac y producto de convolución .....	29
3.4 Notación .....	30
3.5 Derivación .....	30
3.6 Peinilla de Dirac .....	32
3.7 Teorema de interpolación .....	34
<b>4. Frecuencia espacial</b> .....	<b>37</b>
4.1 Noción de frecuencia espacial .....	37
4.2 Reconstrucción de imágenes .....	40
<b>5. Espectro angular</b> .....	<b>43</b>
5.1 Propagación de la luz: teoría escalar .....	43
5.2 La asociación entre frecuencia espacial y onda plana .....	44
5.3 Frecuencia angular .....	45

IV Contenido

5.4	Espectro angular .....	46
5.5	Ejemplos .....	47
5.6	Propagación del espectro angular .....	49
<b>6.</b>	<b>Elementos de óptica de Fourier .....</b>	<b>53</b>
6.1	Transformación de Fourier “óptica” (teoría metaxial) .....	53
6.2	Formación de las imágenes con luz coherente .....	58
6.3	Filtrado de las frecuencias espaciales .....	61
<b>7.</b>	<b>Espectro angular esférico .....</b>	<b>71</b>
7.1	Noción de espectro angular esférico .....	71
7.2	Aplicación al estudio de la formación de las imágenes .....	72
7.3	Propagación del espectro angular esférico .....	73
<b>8.</b>	<b>Ondas policromáticas .....</b>	<b>77</b>
8.1	Método de estudio general .....	77
8.2	Efecto temporal de la difracción .....	78
8.3	Red de difracción. Análisis espectral de la luz .....	80
8.4	Espectroscopia por transformación de Fourier .....	82
8.5	Espectros acanalados .....	85
<b>9.</b>	<b>Conclusión .....</b>	<b>91</b>
	<b>Anexos. Transformadas de Fourier .....</b>	<b>95</b>
	<b>Bibliografía .....</b>	<b>97</b>
	<b>Índice de materias .....</b>	<b>99</b>

## Símbolos y notaciones

### Símbolos

$\mathbb{Z}$	Anillo de los números enteros
$\mathbb{R}$	Cuerpo (o campo) de los números reales
$\mathbb{C}$	Cuerpo de los números complejos
$\mathbb{R}^2$	Espacio de los pares de números reales
$[a, b]$	Conjunto de los números reales tales que $a \leq x \leq b$
$]a, b[$	Conjunto de los números reales tales que $a < x < b$
$x \in A$	$x$ es un elemento de $A$
$\bar{z}$	Número complejo conjugado de $z$
$\Re\{z\}$	Parte real de $z$
$d$	Diferencial
$i$	Número imaginario tal que $i^2 = -1$
$e$	Base de logaritmo neperiano ( $e = 2,718\,281\,828\dots$ )
$\delta$	Distribución de Dirac
$\sqcup$	Peinilla de Dirac
$\text{rect}_\ell$	Función rectángulo de ancho $\ell$
$\Delta_\ell$	Función triángulo de base $2\ell$ (su altura es $\ell$ )
$\hat{f}$	Transformada de Fourier de $f$
$f \rightleftharpoons \hat{f}$	$f$ y $\hat{f}$ forman un par de Fourier
$f * g$	Producto de convolución de $f$ y $g$
$c$	Velocidad de la luz (en el vacío): $c = 299\,792\,458$ m/s
$\lambda$	Longitud de onda
$\nu$	Frecuencia (temporal)
$\mathbf{F}$	Frecuencia espacial
$\Phi$	Frecuencia angular
$\mathcal{A}$	Emisor o receptor (casquete esférico)
$\mathcal{F}$	Esfera de Fourier (de un casquete esférico)
$R_A$	Radio de curvatura de $\mathcal{A}$
$U_A$	Amplitud del campo sobre $\mathcal{A}$ (onda monocromática)
$I_A$	Iluminación o intensidad vibratoria sobre $\mathcal{A}$
$E_A$	Amplitud del campo eléctrico sobre $\mathcal{A}$ (onda policromática)
$e_A$	Componente espectral del campo sobre $\mathcal{A}$

## Notaciones

Los vectores se representan por letras gruesas, por ejemplo  $\mathbf{r}$ . El producto escalar euclidiano de  $\mathbf{r}$  y  $\mathbf{s}$  se denota  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ .

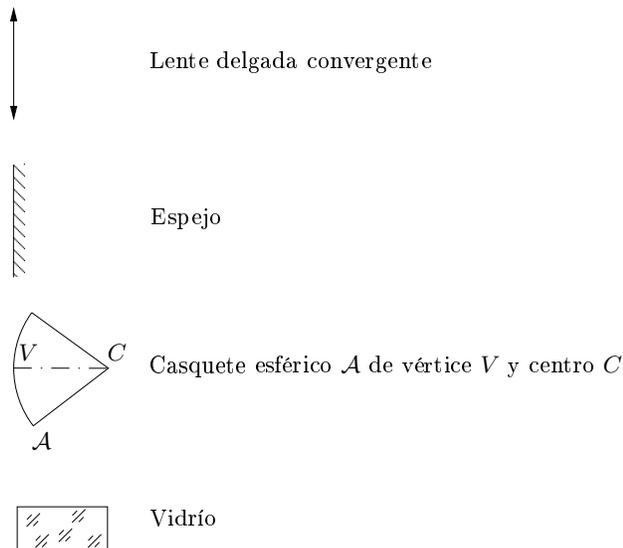
En dimensión 2, con coordenadas ortogonales  $x$  e  $y$ , se escribe  $\mathbf{r} = (x, y)$  y el módulo de este vector es  $r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2)^{1/2}$ . El elemento de superficie en el punto  $\mathbf{r}$  se denota  $d\mathbf{r}$  ( $d\mathbf{r} = dx dy$ ).

Una frecuencia espacial es un vector bidimensional y por tanto se escribe  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  cuyo módulo es  $F = \|\mathbf{F}\| = (F_x^2 + F_y^2)^{1/2}$ . Se tiene también  $d\mathbf{F} = dF_x dF_y$ .

Se escribe  $\int_{\mathbb{R}} \text{ ó } \int_{-\infty}^{+\infty}$  para integrales simples. La escritura  $\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$  denota una integral doble, como lo indican a la vez  $\mathbb{R}^2$  y el elemento diferencial  $d\mathbf{r}$ .

Si la función  $h$  es el producto de convolución de las funciones  $f$  y  $g$ , se escribe  $h = f * g$ , ó  $h(t) = f * g(t)$ . Para evitar ambigüedades se escribe a veces  $h(t) = [f * g](t)$ , ó  $h(t) = [f(t') * g(t')](t)$ , la variable  $t'$  siendo una variable muda.

## Símbolos gráficos



## Introducción

La óptica de Fourier debe su nombre al uso que se hace de la transformación de Fourier para representar toda una clase de fenómenos ópticos. Su desarrollo matemático supone un buen conocimiento de esa transformación, así como de sus principales propiedades y su relación con el producto de convolución. La teoría de las distribuciones es el marco matemático natural del análisis armónico (o de Fourier). En la práctica, se necesita conocer la distribución de Dirac, la peinilla de Dirac, y saber manejarlas en los cálculos.

El objetivo de este texto es dar una introducción a la transformación de Fourier, la convolución y la distribución de Dirac, en los términos más elementales y concretos posibles como antesala al estudio de la óptica de Fourier. No se buscó el rigor matemático y muchos puntos de interés necesitarían complementos importantes para justificarse. Se intentó dar, en forma intuitiva e ilustrativa, el conocimiento mínimo que se necesita para seguir las ideas que fundamentan la óptica de Fourier.

A título de ilustración del análisis armónico se dan unos elementos básicos de la óptica de Fourier. Desarrollos más completos se encuentran en el libro *Lecciones de óptica de Fourier* [4]. Se incluyen también (capítulo 7) unos resultados recientes, con el fin de mostrar a la óptica de Fourier como una rama de investigación activa.

Se citan al final, en una breve bibliografía con comentarios, libros donde el lector interesado encontrará explicaciones completas sobre las teorías mencionadas.

El presente texto fue redactado como introducción a un curso de óptica de Fourier, dictado en la Universidad de Pamplona (Colombia) del 29 de marzo al 17 de abril de 2007. Se agradece la invitación por parte de esta universidad y la ayuda del profesor Jorge Rueda—vicerrector de investigaciones y director del Grupo Óptica Moderna—en la organización del curso y la publicación de este libro. Gracias al profesor Ariel Becerra por su corrección de estilo y ayuda en el diseño de la carátula.



# 1. Transformación de Fourier

## 1.1 Series de Fourier

Sea una función real  $f$ , de una variable real  $t$ , periódica de periodo fundamental  $T$  ( $T \neq 0$ ). Se muestra que  $f(t)$  se escribe

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{n=+\infty} \left( a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T} \right), \quad (1.1)$$

donde  $n$  es un número entero.

La serie que aparece en la relación (1.1) se llama la *serie de Fourier* de la función  $f$ . Los números  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier de  $f$ , los cuales se calculan de la manera siguiente

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \quad (1.2)$$

y para  $n \neq 0$ ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt, \quad (1.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T} dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T} dt. \quad (1.4)$$

Muchas veces se utilizan en física las funciones exponenciales de argumento imaginario en lugar de las funciones coseno y seno, de tal manera que existe otra definición de la serie de Fourier de una función que es la siguiente

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \exp \frac{2i\pi nt}{T}. \quad (1.5)$$

La relación (1.5) se aplica a funciones de valores complejos. El coeficiente de Fourier  $c_n$  se obtiene de la siguiente fórmula

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp \left[ -\frac{2i\pi nt}{T} \right] dt, \quad (1.6)$$

y puede ser, en general, un número complejo. Está bien claro que existe, para una misma función, una relación entre sus coeficientes  $c_n$  por un lado, y sus coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  por el otro.

La relación (1.6) se escribe también en la forma

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp \left[ -\frac{2i\pi nt}{T} \right] dt, \quad (1.7)$$

que será más útil para generalizar.

La función  $f$  puede ser continua, pero las series de Fourier existen también para funciones que tienen discontinuidades en puntos aislados (un número infinito contable de puntos)<sup>1</sup>.

La relación (1.1) muestra que cualquier función periódica se puede concebir como la suma (infinita) de funciones senoidales.

El coeficiente  $a_0$  representa la parte constante de la función  $f$ , y se observa que la función  $h_1$ , tal que

$$h_1(t) = a_1 \cos \frac{2\pi t}{T} + b_1 \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T}, \quad (1.8)$$

tiene  $T$  como periodo.

La función  $h_n$ , tal que

$$h_n(t) = a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T}, \quad (1.9)$$

se llama el *armónico* de orden  $n$  de la función  $f$ ; su periodo fundamental es  $T/n$ . La función  $h_1$  es el armónico fundamental.

El mismo vocabulario se emplea para las funciones  $\exp[2i\pi nt/T]$ . La razón de esa denominación viene del caso cuando  $t$  representa el tiempo (se mide en segundos); luego  $n/T$  es homogéneo a una frecuencia (se mide en Hz).

En resumen, una función periódica  $f$  es la suma ponderada de funciones armónicas cuyas frecuencias son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental que es el inverso del periodo  $T$  de  $f$ . Los coeficientes de la ponderación son los coeficientes de Fourier.

La relación (1.1) es muy útil para tener una representación intuitiva de las funciones armónicas. Por ejemplo en electricidad se pueden observar esas funciones sobre la pantalla de un osciloscopio. La relación (1.5) será más útil para desarrollos teóricos.

<sup>1</sup> La relación (1.5) no se puede aplicar en un punto de discontinuidad. Si  $f$  es una función de variación finita, se muestra

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \exp \frac{2i\pi nt_0}{T} = \frac{1}{2} [f(t_0^-) + f(t_0^+)],$$

donde  $f(t_0^-)$  es el límite a la izquierda de la función  $f$  en  $t_0$  (o límite por valores inferiores a  $t_0$ ), y  $f(t_0^+)$  su límite a la derecha. Si  $f$  es continua en  $t_0$ , se tiene  $f(t_0^-) = f(t_0^+) = f(t_0)$ , y la fórmula anterior lleva a la relación (1.5).

**Aplicación al sonido y la música.** Una flauta, como un violín o un piano, son capaces de producir una misma nota, por ejemplo la nota *la* de un diapasón. Sin embargo, uno es capaz de distinguir el instrumento. ¿Cuál será la razón? La nota *la*, como cualquier nota, se asocia con una frecuencia (440 Hz para la nota *la* de un diapasón) la cual es la frecuencia fundamental de las ondas emitidas por todos los instrumentos que la producen. La diferencia de un instrumento al otro viene de los armónicos: cada instrumento produce también armónicos que son característicos, y son ellos los que permiten reconocer el instrumento.

## 1.2 Ejemplos

**Ejemplo 1.** Se considera la función  $f$  (fig. 1.1), de periodo fundamental  $T$ , definida sobre el intervalo<sup>2</sup>  $] -T/2, T/2]$  por

$$f(t) = -1, \quad \text{si } -\frac{T}{2} < t < 0, \quad (1.10)$$

$$f(0) = f(T/2) = 0, \quad (1.11)$$

$$f(t) = 1, \quad \text{si } 0 < t < \frac{T}{2}. \quad (1.12)$$

La función  $f$  es impar, de tal modo que  $a_n = 0$  para cualquier  $n$ . Se calcula

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T} dt \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T} dt \\ &= \frac{2}{n\pi} \left[ -\cos \frac{2\pi nt}{T} \right]_0^{T/2} \\ &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos n\pi). \end{aligned} \quad (1.13)$$

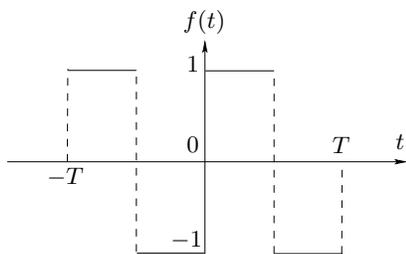
Se concluye, para  $n \geq 0$ ,

$$b_{2n} = 0, \quad (1.14)$$

$$b_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}. \quad (1.15)$$

<sup>2</sup> Los intervalos se denotan de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} x &\in [a, b] \text{ si } a \leq x \leq b; \\ x &\in ]a, b[ \text{ si } a < x < b; \\ x &\in ]a, b] \text{ si } a < x \leq b; \\ x &\in [a, b[ \text{ si } a \leq x < b. \end{aligned}$$



**Figura 1.1.** Función cuadrada periódica. Se limita la gráfica al intervalo  $[-T, T]$ .

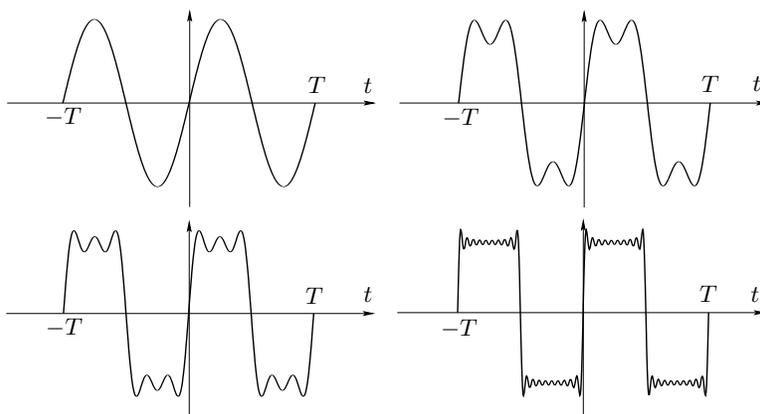
Finalmente se escribe

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{2(2n+1)\pi t}{T} \quad (1.16)$$

$$= \frac{4}{\pi} \left( \operatorname{sen} \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{5} \operatorname{sen} \frac{10\pi t}{T} + \frac{1}{7} \operatorname{sen} \frac{14\pi t}{T} + \dots \right).$$

La figura 1.1 muestra la gráfica de la función  $f$  entre  $-T$  y  $T$ . La figura 1.2 muestra el armónico fundamental (arriba a la izquierda) y varias sumas parciales. La función de la parte derecha baja (fig. 1.2) es

$$s(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{n=9} \frac{1}{2n+1} \operatorname{sen} \frac{2(2n+1)\pi t}{T}. \quad (1.17)$$



**Figura 1.2.** Reconstrucción de la función cuadrada periódica de la figura 1.1 con elementos de su serie de Fourier (se limitan las gráficas al intervalo  $[-T, T]$ ). Arriba a la izquierda: armónico fundamental. Arriba a la derecha: suma de los dos primeros términos. Abajo a la izquierda: suma de los tres primeros términos. Abajo a la derecha: suma de los 9 primeros términos.

La figura 1.3 muestra la suma de los 24 primeros términos.

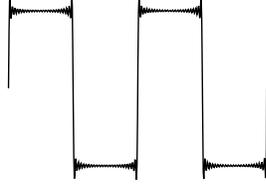


Figura 1.3. Suma de los 24 primeros términos.

**Efecto de una banda pasante limitada.** La aproximación a la función  $f$  es mejor cuando se suman más armónicos. En general los sistemas reales (físicos) no dejan pasar los armónicos más allá de una frecuencia de corte, es decir, no pueden reproducir o transmitir sino un número limitado de armónicos, y por lo tanto, solamente una aproximación de la señal que reciben. Es el caso del oído humano que no percibe frecuencias mayores de 20 kHz (válido para un bebé; esa frecuencia disminuye con la edad hasta por debajo de 10 kHz). En telefonía no se transmiten frecuencias vocales mayores de 6 kHz y eso explica el porqué nuestra voz se oye distinta por teléfono.

**Ejemplo 2.** Se considera la función  $g$  definida por

$$g(t) = \frac{1}{2}(1 + f(t)), \quad (1.18)$$

donde  $f$  es la función del ejemplo 1. Sean  $a'_n$  y  $b'_n$  los coeficientes de Fourier de la función  $g$ . Se tiene

$$a'_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt = \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dt + \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \frac{1}{2}. \quad (1.19)$$

Para  $n \neq 0$  se tiene

$$a'_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos \frac{2\pi nt}{T} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt = 0, \quad (1.20)$$

$$b'_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin \frac{2\pi nt}{T} dt + \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \frac{2\pi nt}{T} dt = \frac{b_n}{2}. \quad (1.21)$$

La función  $g$  se escribe

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{2(2n+1)\pi t}{T} \quad (1.22)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{5} \sin \frac{10\pi t}{T} + \frac{1}{7} \sin \frac{14\pi t}{T} + \dots \right).$$

(La relación (1.22) se podría deducir directamente de las relaciones (1.16) y (1.18), pero es interesante obtenerla de nuevo por el cálculo integral de los coeficientes de Fourier.)

La función  $g$  se deduce multiplicando  $f$  por  $1/2$  y sumándole  $1/2$ . La última operación consiste en añadir una parte constante a la función. Se concluye entonces que:

- si se multiplica una función por algún factor, los coeficientes de Fourier son multiplicados por el mismo factor;
- si se suma a la función una constante, el coeficiente  $a_0$  se aumenta en esa constante y los otros coeficientes quedan sin modificaciones.

**Ejemplo 3.** Se considera la función  $h$  definida por

$$h(t) = g\left(t - \frac{T}{4}\right), \quad (1.23)$$

donde  $g$  es la función del ejemplo 2.

La función  $h$  es par. Se utiliza

$$\operatorname{sen}\left[\frac{2(2n+1)\pi}{T}\left(t - \frac{T}{4}\right)\right] = (-1)^n \cos\frac{2(2n+1)\pi t}{T}, \quad (1.24)$$

y la relación (1.22) para escribir

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\frac{2(2n+1)\pi t}{T} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left( \cos\frac{2\pi t}{T} - \frac{1}{3} \cos\frac{6\pi t}{T} + \frac{1}{5} \cos\frac{10\pi t}{T} - \frac{1}{7} \cos\frac{14\pi t}{T} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

### 1.3 Definición de la transformación de Fourier

Las series de Fourier se aplican a las funciones periódicas. Una función cualquiera se puede imaginar como una función periódica de periodo infinito. ¿Qué se puede decir de las series de Fourier si  $T$  tiende a infinito?

Se nota primero que la diferencia entre dos frecuencias vecinas  $n/T$  y  $(n+1)/T$  tiende a 0 cuando  $T$  tiende a infinito. Eso nos lleva a introducir la frecuencia como una variable continua (variable real). La denotamos  $\nu$ .

Puesto que se reemplaza una variable discreta ( $n/T$ ) por una continua ( $\nu$ ) el paso siguiente consiste en reemplazar las sumas discretas por integrales. Reemplazamos la relación (1.5) por

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c_\nu e^{2i\pi\nu t} dt, \quad (1.26)$$

y la relación (1.7) por

$$c_\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt. \quad (1.27)$$

Las relaciones (1.27) y (1.26) definen la transformación de Fourier y la transformación de Fourier inversa. Solamente vamos a hacer un cambio de notación, pues se va a considerar a  $c_\nu$  como una función de  $\nu$  y se denotará como tal.

Sea  $f$  una función compleja de la variable real  $t$ , integrable. Se llama transformada de Fourier de  $f$  a la función  $\widehat{f}$  definida por

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt. \quad (1.28)$$

La relación (1.28) no es más que otra escritura de la relación (1.27).

La relación (1.26) se escribe entonces

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu, \quad (1.29)$$

y define la transformación de Fourier inversa (se supone que  $\widehat{f}$  es integrable).

Se dice que  $f$  y  $\widehat{f}$  forman un par de Fourier y se escribe

$$f \rightleftharpoons \widehat{f}. \quad (1.30)$$

En lo anterior llamamos  $t$  el tiempo y  $\nu$  la frecuencia. Sin embargo en general y matemáticamente  $t$  y  $\nu$  son solamente dos variables reales. Es solamente en física que interpretamos la una como tiempo y la otra como frecuencia. Pero  $t$  podría ser una longitud y en ese caso se prefiere escribirla como  $x$  y la frecuencia  $\nu$ , siendo frecuencia espacial, la escribiremos como  $F_x$ .

Hay poca diferencia entre la transformación de Fourier definida por la relación (1.28), que se llama transformación de Fourier directa, y la transformación de Fourier inversa, relación (1.29): solamente las diferencia un signo dentro de la función exponencial. Básicamente, la transformación directa y la transformación inversa son una misma transformación. Elegir a la una como directa y a la otra como inversa es cuestión de convención. Pero una vez que se ha adoptado una convención, no se debe cambiar.

**Nota 1.3.1** Hasta ahora se consideraron funciones de una sola variable real, y por lo tanto la transformación de Fourier anterior es unidimensional. En óptica se utilizan muy a menudo transformaciones bidimensionales. Se define la transformación de Fourier en dimensión  $d$ . Si  $X = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  e  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$  son vectores de  $\mathbb{R}^d$ , se denota  $\langle X, Y \rangle$  el producto escalar de  $X$  e  $Y$ , y se define la transformación de Fourier de la función  $f$  ( $f$  es una función compleja definida sobre  $\mathbb{R}^d$ ) por

$$\widehat{f}(Y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(X) e^{-2i\pi\langle X, Y \rangle} dX, \quad (1.31)$$

donde  $dX = dx_1 \cdots dx_d$ . El producto escalar puede ser un producto escalar euclidiano, es decir,

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d, \quad (1.32)$$

pero puede ser también de tipo pseudo-euclidiano, en la forma

$$\langle X, Y \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 - \cdots - x_d y_d. \quad (1.33)$$

## 1.4 Propiedades de la transformación de Fourier

Resumimos unas propiedades en la tabla siguiente. En general, ellas se pueden demostrar a partir de las relaciones (1.28) y (1.29).

**Tabla 1.1.** Propiedades de la transformación de Fourier

Función	Transformada de Fourier
$f(t)$	$\widehat{f}(\nu)$
$f(t - t_0)$	$e^{-2i\pi\nu t_0} \widehat{f}(\nu)$
$e^{2i\pi\nu_0 t} f(t)$	$\widehat{f}(\nu - \nu_0)$
$f\left(\frac{t}{a}\right)$	$ a  \widehat{f}(a\nu)$
$f'(t)$	$2i\pi\nu \widehat{f}(\nu)$
$-2i\pi t f(t)$	$\widehat{f}'(\nu)$

### Otras propiedades.

1. Dada una función  $f$ , se denota como  $\widetilde{f}$  la función  $f$  simetrizada, definida por

$$\widetilde{f}(t) = f(-t). \quad (1.34)$$

Luego se muestra

$$\widehat{\widetilde{f}} = \widetilde{\widehat{f}}. \quad (1.35)$$

2. Se muestra

$$\widetilde{\widehat{f}} = \widehat{\widetilde{f}}, \quad (1.36)$$

es decir

$$\widehat{f}(-\nu) = \widehat{\widetilde{f}}(\nu), \quad (1.37)$$

donde  $\overline{f}$  es la función compleja conjugada de la función  $f$ .

3. Si  $f$  es una función real se tiene

$$\overline{\widehat{f}(-\nu)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2i\pi\nu t} dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = \widehat{f}(\nu). \quad (1.38)$$

La relación (1.38) es un caso particular de la relación (1.37) y significa que la transformada de Fourier de una función real tiene la simetría hermitiana.

4. Si  $f$  es una función par se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos 2\pi\nu t dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin 2\pi\nu t dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos 2\pi\nu t dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos 2\pi\nu t dt. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Si además la función  $f$  es real, se deduce de la relación (1.39) que la función  $\widehat{f}$  es real. En este caso, la relación (1.38) muestra que  $\widehat{f}$  es par también. En conclusión, la transformada de Fourier de una función real y par es una función real y par.

**Nota 1.4.1** Se define la transformada en coseno de la función  $f$  por la relación

$$\widehat{f}^c(\nu) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos 2\pi\nu t dt. \quad (1.40)$$

La relación (1.39) muestra que si  $f$  es una función par, su transformada en coseno es igual a su transformada de Fourier.

Si  $f$  es real y par, la inversión de la relación (1.40) lleva a

$$f(t) = 2 \int_0^{+\infty} \widehat{f}^c(\nu) \cos 2\pi\nu t d\nu. \quad (1.41)$$

**Relación de Parseval-Plancherel.** Sean  $\widehat{f}$  y  $\widehat{g}$  las transformadas de Fourier de las funciones  $f$  y  $g$ . Se muestra (relación de Parseval-Plancherel)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu) \overline{\widehat{g}(\nu)} d\nu, \quad (1.42)$$

donde la barra indica la conjugación compleja.

Como caso particular, se encuentra la relación de Parseval en la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\nu)|^2 d\nu. \quad (1.43)$$

En física o en teoría de señales, la relación de Parseval tiene una interpretación relacionada con la energía (o potencia) de una señal. La energía de una señal cuya representación temporal es la función  $f$ , es precisamente

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (1.44)$$

La relación de Parseval significa que la energía de la señal es la misma si se calcula a partir de la representación frecuencial de la señal, es decir a partir de  $\hat{f}$ . (Es una necesidad física: la energía es una noción intrínseca, que no depende del modo de representación de la señal.)

## 1.5 Ejemplos

**Función rectángulo.** Se define la función  $\text{rect}_L$  (rectángulo de ancho  $L$ ) por

$$\text{rect}_L(t) = 1, \quad \text{si } |t| \leq L/2, \quad (1.45)$$

$$\text{rect}_L(t) = 0, \quad \text{si } |t| > L/2, \quad (1.46)$$

y se calcula su transformada de Fourier. Se denota  $f = \text{rect}_L$  de tal manera que

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}_L(t) e^{-2i\pi\nu t} dt = \int_{-L/2}^{L/2} e^{-2i\pi\nu t} dt \\ &= \frac{-1}{2i\pi\nu} \left[ e^{-2i\pi\nu t} \right]_{-L/2}^{L/2} \\ &= \frac{1}{2i\pi\nu} (e^{i\pi\nu L} - e^{-i\pi\nu L}) \\ &= L \frac{\text{sen } \pi L\nu}{\pi L\nu}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

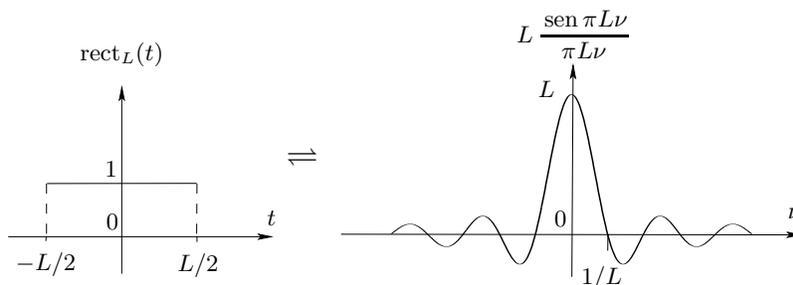


Figura 1.4. La función rectángulo y su transformada de Fourier.

(Hay una simplificación por  $L$  en la relación (1.47), pero no la hacemos para hacer aparecer una función de la forma  $\text{sen } x/x$ .)

Se escribe

$$\text{rect}_L(t) \Leftrightarrow L \frac{\text{sen } \pi L \nu}{\pi L \nu}. \quad (1.48)$$

La similitud entre la transformación de Fourier directa y la inversa (y el hecho que  $\text{rect}_L$  es una función par) permite escribir

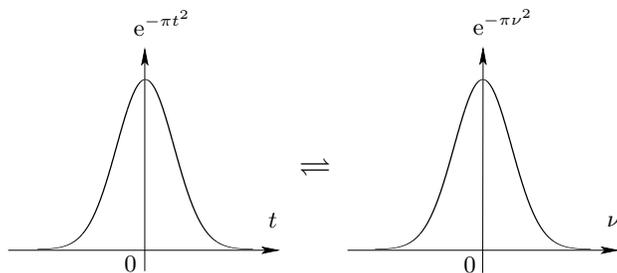
$$L \frac{\text{sen } \pi L t}{\pi L t} \Leftrightarrow \text{rect}_L(\nu). \quad (1.49)$$

**Función de Gauss.** El par de Fourier siguiente es un clásico importante:

$$e^{-\pi t^2} \Leftrightarrow e^{-\pi \nu^2}. \quad (1.50)$$

La función de Gauss es su propia transformada de Fourier (fig. 1.5). Se tiene también

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right] \Leftrightarrow \exp[-2\pi^2\sigma^2\nu^2]. \quad (1.51)$$



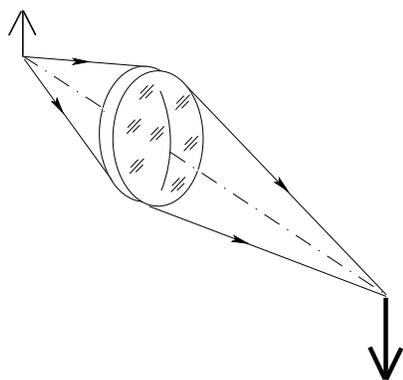
**Figura 1.5.** La función de Gauss es su propia transformada de Fourier.



## 2. Convolución

### 2.1 Un ejemplo

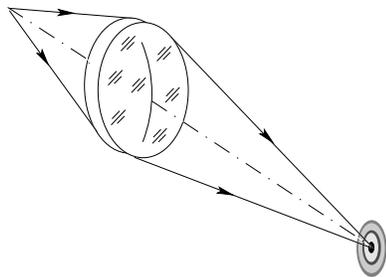
Empezamos con un ejemplo que debe ayudar a entender cómo se interpreta el producto de convolución en física. Se considera un objetivo (para simplificar, asimilado a una lente delgada) que forma la imagen de un objeto (aquí una flecha, véase la fig. 2.1). Según las leyes de la óptica geométrica paraxial, la imagen obtenida es una copia del objeto. Sólo existe un aumento entre los dos: la imagen puede ser más grande que el objeto (es el caso en microscopía) o más pequeña (por ejemplo en fotografía común). La imagen se deduce del objeto en una homotecia cuyo factor es igual al aumento (transversal). Cuando el aumento es negativo, la imagen queda invertida con respecto al objeto (fig. 2.1).



**Figura 2.1.** Formación de una imagen por un objetivo, según la óptica geométrica paraxial. La imagen es una copia homotética del objeto; el aumento es el factor de homotecia.

Se formaliza lo anterior de la manera siguiente. Se eligen coordenadas  $x$ ,  $y$  en el plano del objeto, y  $x'$  y  $y'$  en el plano de la imagen. Si  $U(x, y)$  es la amplitud de la vibración luminosa en el punto  $(x, y)$  del objeto, la amplitud luminosa de la imagen es

$$U_G(x', y') = U\left(\frac{x'}{a}, \frac{y'}{a}\right), \quad (2.1)$$



**Figura 2.2.** En realidad, la imagen de un punto a través de un objetivo no es un punto, sino que la imagen está más bien una manchita. Esta manchita se debe a la difracción (se supone el objetivo bien corregido de las aberraciones).

donde  $a$  es el aumento transversal que corresponde a la posición del objeto. Se dice que  $U_G$  es la amplitud geométrica de la imagen. En la relación (2.1) no se escribe el término  $\exp 2i\pi\nu t$  ( $\nu$  es la frecuencia de la luz); ese término aparecería en ambos lados de la relación y por lo tanto se simplifica.

En la relación (2.1) se despreció también un coeficiente multiplicativo que traduce la transmisión parcial del objetivo, y otro factor relacionado con el aumento; eso no afecta el resultado que se quiere mostrar aquí.

A veces, es más conveniente utilizar notaciones vectoriales:  $\mathbf{r} = (x, y)$  y  $\mathbf{r}' = (x', y')$ , de tal manera que la relación (2.1) se escribe

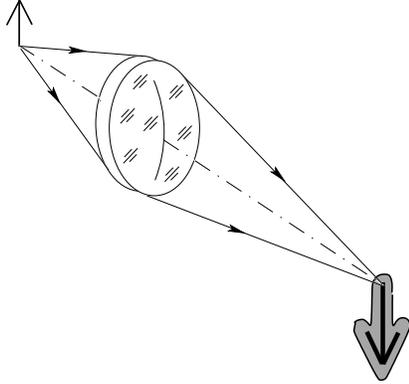
$$U_G(\mathbf{r}') = U\left(\frac{\mathbf{r}'}{a}\right). \quad (2.2)$$

En realidad, la imagen de un punto no es un punto sino una manchita, como lo muestra esquemáticamente la figura 2.2. Dos fenómenos explican eso: (a) las aberraciones geométricas del objetivo; (b) la difracción (por la abertura limitada del objetivo). En un buen objetivo, bien concebido y bien construido, las aberraciones son corregidas y se pueden despreciar. Queda el efecto de la difracción y éste constituye precisamente un tema de aplicación de la óptica de Fourier (véase el párrafo 6.2, en particular el efecto de la pupila, p. 59).

¿Cuál es la consecuencia de la presencia de la manchita sobre el aspecto de la imagen? Se considera de nuevo la flecha objeto de la figura 2.1. Cada punto luminoso que constituye esa flecha tiene como imagen una manchita como la que aparece en la figura 2.2. El resultado está ilustrado en la figura 2.3.

¿Cómo formalizar ahora la formación de la imagen, cuando se toma en cuenta lo anterior, es decir, la presencia de la manchita de difracción? Denótese por  $m$  a la función que describe la amplitud luminosa de la manchita. Para empezar, se consideran solamente dos puntos  $A$  y  $B$  del objeto de coordenadas respectivas  $\mathbf{r}_A = (x_A, y_A)$  y  $\mathbf{r}_B = (x_B, y_B)$ . La imagen geométrica del punto  $A$  es el punto  $A'$  de coordenadas  $\mathbf{r}'_A = (x'_A, y'_A)$  y la imagen geométrica de  $B$  es  $B'$  con  $\mathbf{r}'_B = (x'_B, y'_B)$ . Por definición del aumento transversal  $a$ , se tiene

$$\mathbf{r}'_A = a\mathbf{r}_A, \quad (2.3)$$



**Figura 2.3.** Aspecto de la imagen física cuando se toma en cuenta la manchita de difracción de la fig. 2.2.

$$\mathbf{r}'_B = a\mathbf{r}_B. \quad (2.4)$$

Pero la imagen física de  $A$  es una manchita centrada en  $A'$ . Esa mancha genera en el punto  $\mathbf{r}'$  del plano de la imagen la amplitud luminosa

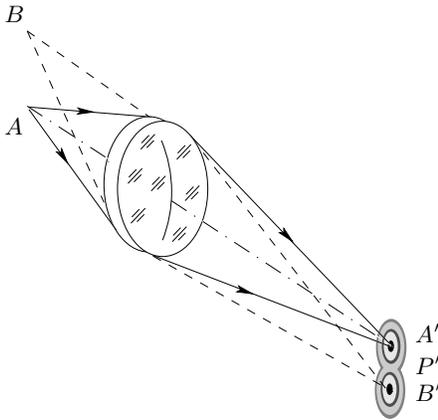
$$V_A(\mathbf{r}') = m(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_A). \quad (2.5)$$

Igualmente la imagen física de  $B$  es la misma manchita pero centrada en  $B'$ ; ésta genera en el punto  $\mathbf{r}'$  la amplitud luminosa

$$V_B(\mathbf{r}') = m(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_B). \quad (2.6)$$

Sea  $P'$  un punto entre  $A'$  y  $B'$ , de coordenadas  $\mathbf{r}'_P = (x'_P, y'_P)$  (fig. 2.4). La amplitud luminosa en  $P'$  es

$$U'(\mathbf{r}'_P) = V_A(\mathbf{r}'_P) + V_B(\mathbf{r}'_P) = m(\mathbf{r}'_P - \mathbf{r}'_A) + m(\mathbf{r}'_P - \mathbf{r}'_B). \quad (2.7)$$



**Figura 2.4.** La amplitud luminosa en  $P'$  es la suma de la amplitud debida a  $A$  y de la amplitud debida a  $B$ .

Hay que introducir una pequeña modificación a lo anterior, pues se supuso implícitamente que  $A$  y  $B$  emitían una misma amplitud luminosa. En realidad, uno de los dos puntos puede ser más luminoso que el otro. Por lo tanto se deben remplazar las relaciones (2.5) y (2.6) por

$$V_A(\mathbf{r}') = U(\mathbf{r}_A) m(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_A), \quad (2.8)$$

$$V_B(\mathbf{r}') = U(\mathbf{r}_B) m(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_B), \quad (2.9)$$

donde  $U(\mathbf{r}_A)$  es la amplitud luminosa en  $A$  y  $U(\mathbf{r}_B)$  en  $B$ . Luego la relación (2.7) resulta en

$$U'(\mathbf{r}'_P) = U(\mathbf{r}_A) m(\mathbf{r}'_P - \mathbf{r}'_A) + U(\mathbf{r}_B) m(\mathbf{r}'_P - \mathbf{r}'_B). \quad (2.10)$$

Se introduce la amplitud de la imagen geométrica—relación (2.2)—y se utilizan las relaciones (2.3) y (2.4) para escribir la relación (2.10) en la forma

$$U'(\mathbf{r}'_P) = U_G(\mathbf{r}'_A) m(\mathbf{r}'_P - \mathbf{r}'_A) + U_G(\mathbf{r}'_B) m(\mathbf{r}'_P - \mathbf{r}'_B). \quad (2.11)$$

Se considera ahora que el objeto es un conjunto de  $J$  puntos luminosos  $A_j$  ( $j = 1, \dots, J$ ). En el plano de la imagen, las coordenadas del punto  $A'_j$ , la imagen de  $A_j$ , son  $\mathbf{r}'_j = (x'_j, y'_j)$ . Se generaliza la relación (2.11) de tal modo que la amplitud luminosa generada en  $P'$  por los puntos luminosos  $A_j$  se escribe

$$U'(\mathbf{r}'_P) = \sum_j U_G(\mathbf{r}'_j) m(\mathbf{r}'_P - \mathbf{r}'_j). \quad (2.12)$$

Finalmente se considera que el objeto es un continuo de puntos como los puntos  $A_j$ . Se remplaza la suma de la relación (2.12) por una integral y se obtiene

$$U'(\mathbf{r}'_P) = \int_{\mathbb{R}^2} U_G(\mathbf{r}') m(\mathbf{r}'_P - \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (2.13)$$

donde  $d\mathbf{r}' = dx' dy'$  si  $\mathbf{r}' = (x', y')$ . La integral en la relación (2.13) es una integral “doble” como lo indica el índice  $\mathbb{R}^2$ .

Con coordenadas  $x', y'$  la relación (2.13) se escribe

$$U'(x'_P, x'_P) = \int_{\mathbb{R}^2} U_G(x', y') m(x'_P - x', y'_P - y') dx' dy'. \quad (2.14)$$

Se dice que la función  $U'$  es el *producto de convolución* de las funciones  $U_G$  y  $m$ , y se denota

$$U' = U_G * m, \quad (2.15)$$

o también (se quita el índice  $P$  de las coordenadas)

$$U'(\mathbf{r}') = U_G * m(\mathbf{r}'), \quad (2.16)$$

y

$$U'(x', y') = U_G * m(x', y'). \quad (2.17)$$

## 2.2 Definición y propiedades del producto de convolución

El producto de convolución de las funciones  $f$  y  $g$  es la función  $h$  definida por

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t') g(t - t') dt', \quad (2.18)$$

cuando la integral existe.

Se escribe  $h = f * g$  y también  $h(t) = f * g(t)$ . A veces es útil hacer aparecer la variable sobre la cual se toma la integral y se escribe, de manera abusiva (pero ¡práctica!),

$$h(t) = [f(t') * g(t')](t), \quad (2.19)$$

donde  $t'$  es una variable muda.

La relación (2.18) es una versión unidimensional de la relación “bidimensional” (2.13). Más generalmente, se define el producto de convolución para funciones definidas sobre  $\mathbb{R}^d$ .

La relación (2.18) se escribe también

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}} f(t - t') g(t') dt', \quad (2.20)$$

y se deduce que el producto de convolución es conmutativo

$$f * g = g * f. \quad (2.21)$$

Se muestra que la función  $h = f * g$  es derivable y se tiene

$$h' = f' * g = f * g'. \quad (2.22)$$

En el caso de funciones de dos (o más) variables se tienen relaciones equivalentes con las derivadas parciales. En dos dimensiones, si  $h = f * g$ , se escribe

$$h(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x', y') g(x - x', y - y') dx' dy', \quad (2.23)$$

luego

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial(f * g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x}. \quad (2.24)$$

### 2.3 Convolución y transformación de Fourier

El resultado central es

$$f * g \hat{=} \widehat{f \hat{g}}, \quad (2.25)$$

es decir, la transformación de Fourier transforma un producto de convolución en un producto sencillo. Se tiene también la propiedad “dual”

$$f g \hat{=} \widehat{f * \hat{g}}. \quad (2.26)$$

Una prueba formal de la relación (2.25) es la siguiente. Se calcula

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu t} \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(t') g(t - t') dt' \right\} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t') \left\{ \int_{\mathbb{R}} g(t - t') e^{-2i\pi\nu t} dt \right\} dt' \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t') \widehat{g}(\nu) e^{-2i\pi\nu t'} dt' \\ &= \widehat{f}(\nu) \widehat{g}(\nu). \end{aligned} \quad (2.27)$$

(Para pasar de la segunda línea a la tercera se utiliza el resultado que figura en la segunda línea de la tabla 1.4 p. 10.)

### 2.4 Ejemplo de aplicación

**Función triángulo.** Se denota  $\Lambda_L$  la función triángulo de base  $2L$  y altura  $L$ , definida por

$$\Lambda_L = \text{rect}_L * \text{rect}_L. \quad (2.28)$$

Se calcula

$$\Lambda_L(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}_L(t') \text{rect}_L(t - t') dt' = \int_{-L/2}^{L/2} \text{rect}_L(t - t') dt'. \quad (2.29)$$

Se obtiene

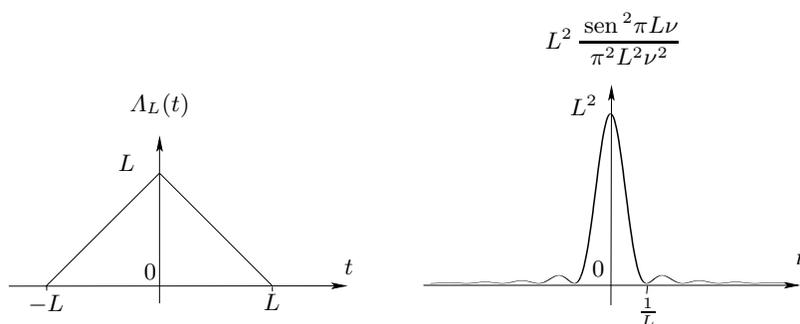
$$\begin{aligned} \text{si } t < -L, & \quad \Lambda_L(t) = 0, \\ \text{si } -L \leq t < 0, & \quad \Lambda_L(t) = t + L, \\ \text{si } 0 \leq t \leq L, & \quad \Lambda_L(t) = L - t, \\ \text{si } L < t, & \quad \Lambda_L(t) = 0. \end{aligned}$$

Se observa que  $\Lambda_L(0) = L$ .

**Transformada de Fourier de la función triángulo.** Ésta se podría calcular por intermedio de una integral. Sin embargo resulta más directo utilizar la relación entre el producto de convolución y la transformación de Fourier: puesto que la función  $A_L$  es igual al producto  $\text{rect}_L * \text{rect}_L$ , según la relación (2.25) su transformada de Fourier es el cuadrado de la transformada de Fourier de la función  $\text{rect}_L$ . Se escribe

$$A_L(t) \Leftrightarrow L^2 \frac{\text{sen}^2 \pi L \nu}{(\pi L \nu)^2}. \quad (2.30)$$

La figura 2.5 ilustra este resultado.



**Figura 2.5.** La función triángulo de base  $2L$  y su transformada de Fourier.

## 2.5 Filtros lineales

Muchos sistemas físicos son lineales en el sentido matemático, lo que significa: (a) que la respuesta de tal sistema a un múltiplo de una excitación es el mismo múltiplo de la respuesta a esa excitación; (b) que la respuesta a la suma de dos excitaciones es la suma de las respuestas correspondientes. Muy a menudo, la linealidad es una consecuencia de la linealidad de las ecuaciones que gobiernan el fenómeno físico considerado: por ejemplo las ecuaciones de Maxwell son lineales y las ondas electromagnéticas que se propagan en un medio lineal<sup>1</sup> se pueden sumar (así se explican las interferencias); en mecánica cuántica, la ecuación de Schrödinger es lineal<sup>2</sup> y la consecuencia es la linealidad de sus soluciones: se pueden sumar las funciones de ondas y obtener interferencias de ondas de probabilidad.

Un *filtro lineal* es un sistema lineal invariante por traslación. El objetivo estudiado en el párrafo 2.1 es un filtro lineal; la hipótesis de la invariancia

<sup>1</sup> Existen medios no lineales.

<sup>2</sup> En física matemática, existe una ecuación de Schrödinger no lineal. Se encuentra por ejemplo en la teoría de los solitones.

por traslación era implícita y se utilizó cuando se supuso que la misma función  $m$  describía la manchita de difracción debida al punto  $A$  o al punto  $B$  (o, al fin, a cualquier punto del objeto). La manchita es la respuesta del sistema (el objetivo) a una excitación puntual (un punto luminoso) y se denomina *respuesta percusional* o *respuesta de impulso* del sistema. El objetivo es invariante espacialmente porque la respuesta de impulso es la misma, cualquier sea el punto luminoso que se considera en el plano del objeto<sup>3</sup>. Al fin, el objetivo es un filtro lineal espacial.

Muchas veces se estudian sistemas temporales, es decir que el tiempo es la variable que permite describir esos sistemas. En tal caso la invariancia anterior es una invariancia temporal. La respuesta de impulso del sistema es la respuesta a una excitación infinitamente breve, que llamamos impulso de Dirac<sup>4</sup>. La invariancia temporal significa que la respuesta del sistema a un impulso de Dirac es la misma, cualquiera que sea el momento de emisión del impulso.

La propiedad esencial de un filtro lineal es la siguiente. Sea  $\mathcal{S}$  un filtro lineal, es decir un sistema lineal invariante por traslación. Sea  $r$  la respuesta de impulso del filtro. Luego, la respuesta  $s$  del sistema a una excitación cualquiera  $e$  es el producto de convolución de  $r$  y  $e$

$$s = r * e. \quad (2.31)$$

Para un sistema temporal se escribe

$$s(t) = r * e(t). \quad (2.32)$$

Las relaciones (2.16) y (2.17) son válidas para un filtro lineal espacial (en dos dimensiones).

**Descripción frecuencial.** Considérese en adelante un filtro lineal temporal. El caso de los filtros lineales espaciales son parte de la óptica de Fourier y se estudiarán en el capítulo correspondiente (capítulo 6).

Un mismo filtro lineal  $\mathcal{S}$  se puede describir utilizando la frecuencia  $\nu$  en lugar del tiempo, y es precisamente la transformación de Fourier la que permite pasar del espacio temporal al espacio frecuencial. Se aplica la transformación de Fourier a ambos miembros de la relación (2.32) y se obtiene

$$\hat{s}(\nu) = \hat{r}(\nu) \hat{e}(\nu). \quad (2.33)$$

La función  $\hat{r}$  se llama *función de transferencia* del filtro lineal.

La relación (2.33) tiene gran ventaja práctica sobre la relación (2.32). Considérense dos filtros lineales  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  de respuestas de impulso respectivas

<sup>3</sup> Es solamente una aproximación, debido a la aberración llamada *distorsión*.

<sup>4</sup> La introducción de la distribución de Dirac (véase el capítulo 3) permitirá formalizar eso con más rigor.

$r_1$  y  $r_2$ . Se envía una excitación  $e$  sobre  $\mathcal{S}_1$  y la respuesta que se obtiene sirve de excitación a  $\mathcal{S}_2$  (se dice que  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  están en cascada). La respuesta temporal del sistema  $\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1$  se escribe

$$s = r_2 * (r_1 * e). \quad (2.34)$$

La relación (2.34) se puede escribir con integrales, pero el resultado es un poco complicado. Se dificultan más las cosas si hay varios sistemas seguidos.

En cambio, en el espacio frecuencial, el sistema  $\mathcal{S}_2\mathcal{S}_1$  se traduce por

$$\hat{s}(\nu) = \hat{r}_2(\nu) \hat{r}_1(\nu) \hat{e}(\nu). \quad (2.35)$$

La relación (2.35) se generaliza a un número cualquiera de filtros lineales seguidos. La función de transferencia del sistema resultante es el producto (sencillo) de las funciones de transferencia de cada sistema.



### 3. Distribuciones

La transformación de Fourier, tal como se introdujo en el capítulo 1, se aplica a funciones integrables (se entiende integrables entre  $-\infty$  y  $+\infty$ ). Se plantea luego el problema siguiente: las funciones coseno, seno o exponencial de argumento imaginario no son integrables y por lo tanto no tienen transformadas de Fourier en el sentido del capítulo 1. Esa situación no es admisible, pues sería renunciar a utilizar las funciones anteriores en muchas aplicaciones relacionadas con la transformación de Fourier.

La teoría de las distribuciones es un marco matemático riguroso en el cual se define precisamente la transformación de Fourier de las funciones coseno y seno. No se trata acá de desarrollar esa teoría, sino de presentar de manera intuitiva unas distribuciones que se utilizan con frecuencia en óptica y en la teoría de señales y sistemas. Se trata de la distribución y de la peñilla de Dirac.

#### 3.1 Distribución de Dirac

**La distribución de Dirac como límite de funciones.** Se considera la función  $\text{rect}_L$  cuya transformada de Fourier es la función

$$\widehat{\text{rect}}_L(\nu) = L \frac{\text{sen } \pi L \nu}{\pi L \nu}. \quad (3.1)$$

Si se aumenta el valor de  $L$ , la función  $\text{rect}_L$  se vuelve más ancha y su transformada de Fourier más estrecha. Si  $L$  tiende a infinito,  $\text{rect}_L(t)$  tiende a 1 para cualquier  $t$ . Es decir que la función  $\text{rect}_L$ , que es integrable, tiende a la función  $t \mapsto 1$  que no es integrable.

¿Que pasa en el dominio de Fourier (espacio frecuencial)? Cuando  $L$  tiende a infinito, se tiene, para todo  $\nu \neq 0$ ,

$$L \frac{\text{sen } \pi L \nu}{\pi L \nu} \longrightarrow 0. \quad (3.2)$$

El valor de  $\widehat{\text{rect}}_L$  en  $\nu = 0$  es  $L$ , y tiende a infinito. Se podría decir que la función  $\widehat{\text{rect}}_L$  tiende hacia una función que vale cero en todas partes, menos

en 0 donde es infinita. En la realidad eso no es exactamente una función, sino más bien una distribución: es la distribución de Dirac, la cual se denota  $\delta$ .

Se tiene

$$\delta = \lim_{L \rightarrow \infty} \widehat{\text{rect}}_L, \quad (3.3)$$

o, con notación abusiva,

$$\delta = \lim_{L \rightarrow \infty} L \frac{\text{sen } \pi L \nu}{\pi L \nu}. \quad (3.4)$$

Si se toman los límites de ambos miembros de la relación (3.1) se obtiene

$$1 \rightleftharpoons \delta. \quad (3.5)$$

El mismo método aplicado a la relación (1.49) lleva a

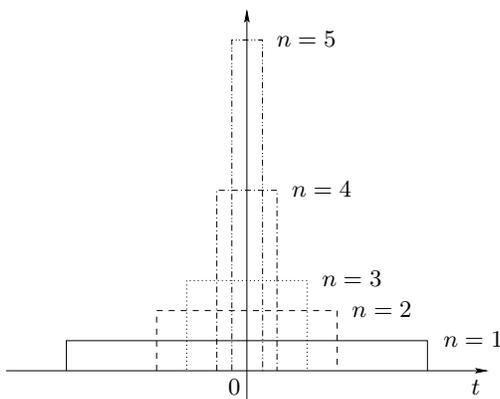
$$\delta \rightleftharpoons 1. \quad (3.6)$$

Se nota que se pudo asociar una transformada de Fourier a una función que no es integrable (la función  $t \mapsto 1$ ). La transformada de Fourier obtenida no es una función, sino una distribución (la distribución de Dirac).

**Otros límites.** Se muestra también

$$\delta = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L} \text{rect}_L. \quad (3.7)$$

Se observa que cualquiera que sea  $L$  se tiene



**Figura 3.1.** Funciones rectángulo normadas, de la forma  $\text{rect}_{L_n}/L_n$ , que tienden a una distribución de Dirac cuando  $n$  tiende a infinito ( $L_i < L_j$  si  $i > j$ ). La superficie de cada rectángulo es la misma.

$$\frac{1}{L} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}_L(t) dt = 1, \quad (3.8)$$

lo que traduce que las funciones  $(1/L)\text{rect}_L$  son normadas. La figura 3.1 muestra unas funciones rectángulo normadas, cuyo límite es una distribución de Dirac.

Se muestra también que la distribución de Dirac es el límite de unas funciones de Gauss. Precisamente se tiene

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-\pi n^2 x^2}. \quad (3.9)$$

**Distribución de Dirac en  $t_0$ .** Por comparación con la relación (3.7), se define  $\delta_{t_0}$  como

$$\delta_{t_0} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L} \text{rect}_L(t - t_0). \quad (3.10)$$

La relación (3.17) ofrece otra posibilidad de definición.

**Multiplicación de una distribución de Dirac por una función.** Si  $f$  es una función continua en 0, la relación (3.7) lleva a

$$\lim_{L \rightarrow 0} \frac{1}{L} f(t) \text{rect}_L(t) = f(0) \delta, \quad (3.11)$$

y se define el producto de  $f$  y  $\delta$  como

$$f \delta = f(0) \delta. \quad (3.12)$$

Más generalmente, si  $f$  es continua en  $t_0$ , se deduce de la relación (3.10)

$$f \delta_{t_0} = f(t_0) \delta_{t_0}. \quad (3.13)$$

### 3.2 Transformada de Fourier de las funciones senoidales

Se considera la función  $f$  tal que

$$f(t) = \text{rect}_L(t) \cos 2\pi\nu_0 t, \quad (3.14)$$

que se puede escribir

$$f(t) = \frac{1}{2} \text{rect}_L(t) (e^{2i\pi\nu_0 t} + e^{-2i\pi\nu_0 t}). \quad (3.15)$$

Las propiedades de la transformación de Fourier llevan a

$$\widehat{f}(\nu) = \frac{L}{2} \frac{\text{sen } \pi L(\nu - \nu_0)}{\pi L(\nu - \nu_0)} + \frac{L}{2} \frac{\text{sen } \pi L(\nu + \nu_0)}{\pi L(\nu + \nu_0)}. \quad (3.16)$$

Se considera que  $L$  tiende a infinito. Lo que se dijo en el párrafo anterior sobre la función  $(L \operatorname{sen} \pi L \nu) / \pi L \nu$  se puede decir ahora pero cambiando  $\nu$  por  $\nu - \nu_0$  y  $\nu + \nu_0$ .

Se define la distribución de Dirac en  $\nu = \nu_0$  como

$$\delta_{\nu_0} = \lim_{L \rightarrow \infty} L \frac{\operatorname{sen} \pi L(\nu - \nu_0)}{\pi L(\nu - \nu_0)}, \quad (3.17)$$

y la distribución de Dirac en  $\nu = -\nu_0$  como

$$\delta_{-\nu_0} = \lim_{L \rightarrow \infty} L \frac{\operatorname{sen} \pi L(\nu + \nu_0)}{\pi L(\nu + \nu_0)}. \quad (3.18)$$

Por otra parte, cuando  $L$  tiende a infinito, se tiene para todo  $t$

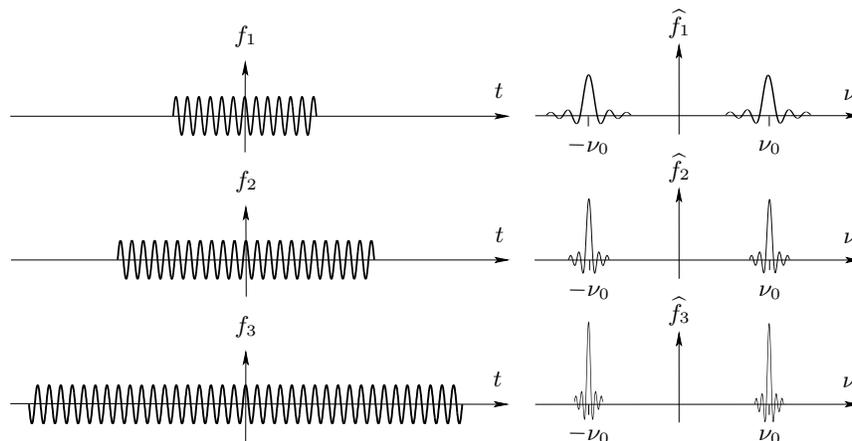
$$f(t) = \operatorname{rect}_L(t) \cos 2\pi \nu_0 t \longrightarrow \cos 2\pi \nu_0 t, \quad (3.19)$$

de tal modo que, en el límite, las relaciones (3.14) y (3.16) conllevan a

$$\cos 2\pi \nu_0 t \rightleftharpoons \frac{1}{2}(\delta_{\nu_0} + \delta_{-\nu_0}). \quad (3.20)$$

La figura 3.2 ilustra este proceso (sólo falta el coeficiente 1/2 que se encuentra en el cálculo explícito).

Por linealidad de la transformación de Fourier se obtiene luego



**Figura 3.2.** Considérense las funciones  $f_j$  definidas por  $f_j(t) = \operatorname{rect}_{L_j}(t) \cos 2\pi \nu_0 t$ . La transformada de Fourier de  $f_j$  es  $\widehat{f}_j$ ; ésta se compone de dos “picos” expresados por funciones de la forma  $\operatorname{sen} x/x$  y localizados en las frecuencias  $-\nu_0$  y  $\nu_0$ , como lo muestra la gráfica. Si  $j > i$ , se supone  $L_j > L_i$ , de tal modo que los dos picos de  $\widehat{f}_j$  son más estrechos que los picos de  $\widehat{f}_i$ , como lo muestra la gráfica. Cuando  $j$  tiende a infinito, las funciones  $f_j$  tienden a la función  $\cos 2\pi \nu_0 t$  y las funciones  $\widehat{f}_j$  tienden a dos distribuciones de Dirac, localizadas en  $-\nu_0$  y  $\nu_0$ .

$$e^{2i\pi\nu_0 t} \rightleftharpoons \delta_{\nu_0}, \quad (3.21)$$

y también

$$\text{sen } 2\pi\nu_0 t \rightleftharpoons \frac{1}{2i}(\delta_{\nu_0} - \delta_{-\nu_0}). \quad (3.22)$$

Finalmente, las funciones senoidales tienen una transformada de Fourier, en forma de una distribución.

El mismo método lleva a los resultados siguientes

$$\delta_{t_0} \rightleftharpoons e^{-2i\pi\nu t_0}, \quad (3.23)$$

$$\frac{1}{2}(\delta_{t_0} + \delta_{-t_0}) \rightleftharpoons \cos 2\pi\nu t_0, \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{2i}(\delta_{t_0} - \delta_{-t_0}) \rightleftharpoons -\text{sen } 2\pi\nu t_0. \quad (3.25)$$

### 3.3 Distribución de Dirac y producto de convolución

Para facilitar las escrituras se denomina  $E$  la función definida por

$$t \longmapsto E(t) = e^{2i\pi\nu_0 t}. \quad (3.26)$$

Se sabe ya que  $\widehat{E} = \delta_{\nu_0}$ . Se considera la relación (véase la tabla 1.4 p. 10)

$$e^{2i\pi\nu_0 t} f(t) \rightleftharpoons \widehat{f}(\nu - \nu_0), \quad (3.27)$$

que se escribe también

$$E(t) f(t) \rightleftharpoons \widehat{f}(\nu - \nu_0). \quad (3.28)$$

Pero se tiene  $\widehat{E}f = \widehat{E} * \widehat{f}$ , de tal modo que se obtiene

$$\widehat{f}(\nu - \nu_0) = \widehat{E} * \widehat{f}(\nu) = \delta_{\nu_0} * \widehat{f}(\nu). \quad (3.29)$$

Se concluye que hacer el producto de convolución de una función con la distribución de Dirac  $\delta_{\nu_0}$  es equivalente a trasladar la función en  $\nu_0$ .

En particular si se toma  $\nu_0 = 0$  se obtiene

$$\widehat{f}(\nu) = \delta * \widehat{f}(\nu). \quad (3.30)$$

La relación (3.30) es válida cualquiera que sea la función  $\widehat{f}$  de tal modo que la distribución de Dirac en 0 es el elemento neutro del producto de convolución.

Claro está que las mismas relaciones quedan válidas en el espacio original, es decir con la variable  $t$ .

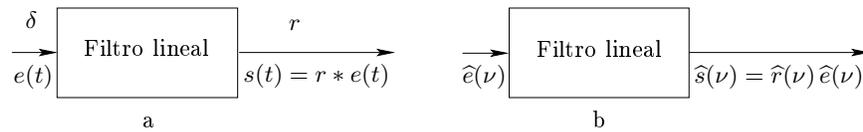
**Aplicación a los filtros lineales.** Se vio en la sección 2.5 que la respuesta  $s$  de un filtro lineal a una excitación cualquiera  $e$  se escribía  $s = r * e$ , donde  $r$  era la respuesta percusional (o de impulso) del filtro. Si  $e = \delta$  (distribución de Dirac) se obtiene  $s = r * \delta = r$ , es decir que la respuesta percusional del filtro es su respuesta a un impulso de Dirac, como se mencionó en la sección 2.5.

Se pasa al dominio de Fourier por una transformación de Fourier. El producto de convolución se vuelve un producto sencillo y se tiene

$$\widehat{s} = \widehat{r} \widehat{e}. \quad (3.31)$$

La función (o distribución)  $\widehat{r}$  es la función de transferencia del filtro.

La figura 3.3 ilustra las dos descripciones equivalentes de un filtro lineal temporal.



**Figura 3.3.** Filtro lineal (temporal): (a) Descripción temporal; (b) Descripción frecuencial.

### 3.4 Notación

Aunque la distribución de Dirac no es una función, es práctico, a veces, escribirla como si fuera una función. Así, en lugar de  $\delta$ , se escribe  $\delta(t)$ , en el espacio “temporal” y  $\delta(\nu)$  en el espacio frecuencial. Se escribe también  $\delta(t - t_0)$  en lugar de  $\delta_{t_0}$ .

### 3.5 Derivación

En la teoría de las distribuciones, se muestra que cualquier distribución es indefinidamente derivable. Nos limitamos aquí a examinar las derivadas de la distribución de Dirac.

Sea  $f'$  la derivada de la función  $f$ . Puesto que  $\delta$  es el elemento neutro del producto de convolución, se escribe

$$f' = \delta * f'. \quad (3.32)$$

Pero si se recuerda que  $(f * g)' = f' * g = f * g'$ , es natural escribir

$$\delta * f' = \delta' * f. \quad (3.33)$$

La relación (3.33) define la distribución derivada de la distribución de Dirac, denotada  $\delta'$ .

La generalización a la derivada de orden  $n$  ( $n$  número entero positivo) es inmediata, en la forma

$$\delta^{(n)} * f = \delta * f^{(n)} = f^{(n)}. \quad (3.34)$$

¿Cuál es la transformada de Fourier de  $\delta'$ ? Para encontrarla se utiliza

$$f'(t) \Leftrightarrow \widehat{f'}(\nu) = 2i\pi\nu\widehat{f}(\nu). \quad (3.35)$$

Luego se escribe  $f' = \delta' * f$  de tal modo que

$$\widehat{f'} = \widehat{\delta'} \widehat{f}. \quad (3.36)$$

De la comparación de las relaciones (3.35) y (3.36) se deduce

$$\delta' \Leftrightarrow 2i\pi\nu. \quad (3.37)$$

El mismo método desarrollado a partir de la relación

$$-2i\pi t f(t) \Leftrightarrow \widehat{f'}(\nu), \quad (3.38)$$

lleva a

$$-2i\pi t \Leftrightarrow \delta'. \quad (3.39)$$

La generalización al orden  $n$  se escribe

$$\delta^{(n)} \Leftrightarrow (2i\pi\nu)^n, \quad (3.40)$$

$$(-2i\pi t)^{(n)} \Leftrightarrow \delta^{(n)}. \quad (3.41)$$

**Función de Heaviside.** Se denota  $Y$  la función de Heaviside definida por  $Y(t) = 0$ , si  $t < 0$ ; e  $Y(t) = 1$ , si  $t \geq 0$ . Es una función discontinua en 0, y luego no tiene derivada en 0 como función. Sin embargo, si se considera como una distribución, se puede derivar y se muestra

$$Y' = \delta. \quad (3.42)$$

Más generalmente cualquier función que tiene una discontinuidad se puede derivar, en el sentido de las distribuciones. La derivada contiene una distribución de Dirac en cada punto de discontinuidad de la función.

### 3.6 Peinilla de Dirac

**Definición y transformada de Fourier.** Una peinilla de Dirac se compone de distribuciones de Dirac periódicamente trasladadas. Si  $L$  es el periodo, la peinilla se denota  $\sqcup\sqcup_L$  y se define como

$$\sqcup\sqcup_L = L \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{nL}, \quad (3.43)$$

donde  $n$  es un número entero. Con una notación funcional, la relación (3.43) se escribe

$$\sqcup\sqcup_L(t) = L \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nL). \quad (3.44)$$

Se muestra

$$\sqcup\sqcup_L(t) \Leftrightarrow L \sqcup\sqcup_{1/L}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{L}\right). \quad (3.45)$$

**Funciones periódicas.** Sea  $f$  una función periódica, de periodo fundamental  $T$ . Sea  $m$  la función definida por

$$m(t) = f(t), \quad \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad (3.46)$$

$$m(t) = 0, \quad \text{si } \frac{T}{2} < |t|. \quad (3.47)$$

La función  $m$  es el “motivo” de  $f$ , de tal modo que  $f$  aparece como la periodización de  $m$ .

Para  $t \in ](2n-1)T/2, (2n+1)T/2]$  se tiene

$$f(t) = m(t - nT) = m * \delta_{nT}(t). \quad (3.48)$$

Puesto que los intervalos  $](2n-1)T/2, (2n+1)T/2]$  son de intersección vacía y cubren  $\mathbb{R}$  cuando  $n$  describe  $\mathbb{Z}$ , se obtiene, para todo  $t$ ,

$$f(t) = \left[ m * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{nT} \right](t) = \frac{1}{T} m * \sqcup\sqcup_T(t), \quad (3.49)$$

es decir

$$f = \frac{1}{T} m * \sqcup\sqcup_T. \quad (3.50)$$

Para calcular la transformada de Fourier de la función  $f$  se aprovecha el hecho que es un producto de convolución. Se utiliza la relación (3.45) y se obtiene

$$\widehat{f}(\nu) = \widehat{m}(\nu) \sqcup\sqcup_{1/T}(\nu). \quad (3.51)$$

La relación (3.51) se escribe también de la forma

$$\widehat{f}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \widehat{m}(\nu) \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \widehat{m}\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right). \quad (3.52)$$

**Ejemplo.** La función  $h$  del ejemplo 3 p. 8 se describe con el periodo  $T$  y el motivo  $m = \text{rect}_{T/2}$ . Luego

$$h = \frac{1}{T} \text{rect}_{T/2} * \sqcup\sqcup_T. \quad (3.53)$$

Se utiliza

$$\text{rect}_{T/2}(t) \Leftrightarrow \frac{T}{2} \frac{\text{sen} \frac{\pi T \nu}{2}}{\frac{\pi T \nu}{2}}, \quad (3.54)$$

y por transformación de Fourier se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{h}(\nu) &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\text{sen} \frac{\pi T \nu}{2}}{\frac{\pi T \nu}{2}} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\text{sen} \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{2} \delta(\nu) + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{n=+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \delta\left(\nu - \frac{2n+1}{T}\right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Por transformación de Fourier inversa se encuentra de nuevo la expresión de la función  $h$  en la forma de una serie de Fourier. Primero se escribe la relación (3.55) como

$$\widehat{h}(\nu) = \frac{1}{2} \delta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[ \delta\left(\nu - \frac{2n+1}{T}\right) + \delta\left(\nu + \frac{2n+1}{T}\right) \right]. \quad (3.56)$$

Por transformación de Fourier inversa se obtiene

$$h(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \frac{2(2n+1)\pi t}{T}. \quad (3.57)$$

La relación (3.57) no es más que la relación (1.25) que se obtiene por las series de Fourier. Más generalmente, la teoría de las distribuciones permite considerar las series de Fourier como casos particulares de transformadas de Fourier. En la práctica, la noción de peinilla de Dirac permite obtener la serie de Fourier de una función periódica a partir de su transformada de Fourier.

**Fórmula sumatoria de Poisson.** Sea  $f$  una función y  $\widehat{f}$  su transformada de Fourier. Se muestra

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f\left(\frac{n}{\ell}\right) = \ell \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \widehat{f}(n\ell). \quad (3.58)$$

La relación (3.58) es una versión de la fórmula sumatoria de Poisson. Una versión más simple se encuentra para  $\ell = 1$  y es

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \widehat{f}(n). \quad (3.59)$$

Existe una versión más general en la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(t - n\ell) = \frac{1}{\ell} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \widehat{f}\left(\frac{n}{\ell}\right) e^{2i\pi nt/\ell}. \quad (3.60)$$

Puesto que  $\widehat{\delta} = 1$ , la relación (3.60) se adapta a la distribución de Dirac en la forma

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - n\ell) = \frac{1}{\ell} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{2i\pi nt/\ell}. \quad (3.61)$$

### 3.7 Teorema de interpolación

El teorema siguiente tiene gran importancia en la teoría de señales y sistemas.

**Teorema (Shannon-Wittaker).** Sea  $f$  una función continua de la variable real  $t$ , y sea  $\widehat{f}$  su transformada de Fourier. Si el soporte de  $\widehat{f}$  está incluido<sup>1</sup> en  $[-\nu_0, \nu_0]$ , luego el valor de  $f$  en cualquier valor de  $t$  está perfectamente definido por los valores que toma  $f$  en los puntos  $t_n = n\ell$ , donde  $\ell \leq 1/2\nu_0$ . Precisamente

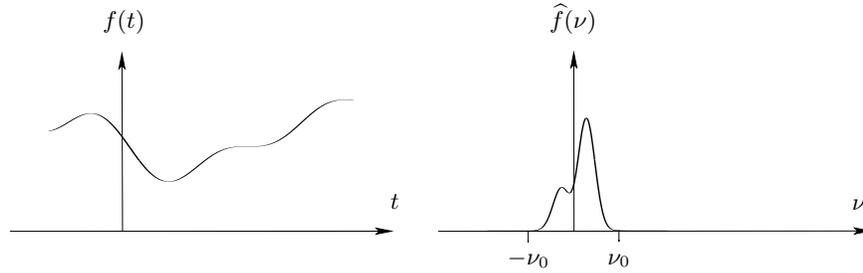
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \ell f(n\ell) \frac{\sin 2\pi\nu_0(t - n\ell)}{\pi(t - n\ell)}. \quad (3.62)$$

En particular, si  $\ell = 1/2\nu_0$ , se obtiene

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f\left(\frac{n}{2\nu_0}\right) \frac{\sin(2\pi\nu_0 t - n\pi)}{2\pi\nu_0 t - n\pi}. \quad (3.63)$$

Se puede entender el teorema de Shannon en forma intuitiva a partir de las figuras 3.4 y 3.5. La figura 3.4 representa una función  $f$  (a la izquierda) y su transformada de Fourier  $\widehat{f}$  (a la derecha). Se supone que el soporte de  $\widehat{f}$  está incluido en el intervalo  $[-\nu_0, \nu_0]$ .

<sup>1</sup> Significa que  $\widehat{f}(\nu) = 0$  si  $\nu \notin [-\nu_0, \nu_0]$ .



**Figura 3.4.** La función  $f$  tiene una transformada de Fourier (espectro) de soporte finito incluido en  $[-\nu_0, \nu_0]$ .

Se considera la función  $f_m$ , la cual es una versión muestreada de la función  $f$ . Es decir que  $f_m$  es una suma de distribuciones de Dirac en la forma

$$f_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(t) \delta(t - n\ell) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(n\ell) \delta(t - n\ell), \quad (3.64)$$

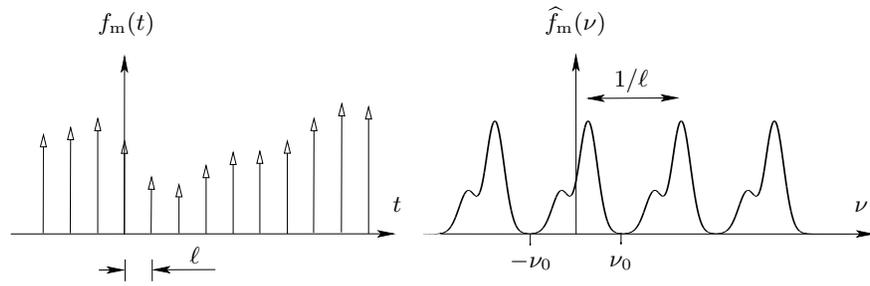
donde  $\ell$  es el paso del muestreo. El hecho de muestrear la función  $f$  se traduce por una periodización en el espacio de Fourier, como lo muestra la figura 3.5. Más precisamente se utiliza la formula somataria de Poisson para escribir

$$\begin{aligned} \widehat{f}_m(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \widehat{f} * \widehat{\delta}_{n\ell}(\nu) \\ &= \widehat{f} * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \widehat{\delta}_{n\ell}(\nu) \\ &= \frac{1}{\ell} \widehat{f} * \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta_{n/\ell}(\nu) \\ &= \frac{1}{\ell} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \widehat{f}\left(\nu - \frac{n}{\ell}\right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Si  $\ell \geq 1/2\nu_0$  no hay recubrimiento de espectros, lo que significa que sobre el intervalo  $[-\nu_0, \nu_0]$  la función  $\widehat{f}_m$  se confunde con la función  $\widehat{f}/\ell$ . Luego si se multiplica  $\widehat{f}_m$  por la función  $\text{rect}_{2\nu_0}$  se tiene

$$\widehat{f}(\nu) = \ell \widehat{f}_m(\nu) \text{rect}_{2\nu_0}(\nu), \quad (3.66)$$

y si se aplica la transformación de Fourier inversa a los dos miembros de esa relación se obtiene la relación (3.62).



**Figura 3.5.** La función  $f_m$  es la función  $f$  de la figura 3.4 muestreada al paso  $\ell$ . Su transformada de Fourier es la transformada de Fourier de  $f$  periodizada al paso  $1/\ell$ . Si  $\ell \geq 1/2\nu_0$  no hay recubrimiento de espectros y la transformada de Fourier de  $f$  se obtiene si se multiplica  $\hat{f}_m$  por la función  $\text{rect}_{2\nu_0}$ .

## 4. Frecuencia espacial

### 4.1 Noción de frecuencia espacial

Sea  $U$  una función<sup>1</sup> de dos variables espaciales reales  $x$  e  $y$ . La función  $U$  puede tomar valores complejos; pero si  $0 \leq U(x, y) \leq 1$ , se puede considerar que  $U$  representa una imagen, como aparece sobre una fotografía en blanco y negro (o en una diapositiva). Se adoptará el término “imagen”, o “imagen compleja”, en un sentido general, y se dice que la función  $U$  es la amplitud de la imagen.

La transformada de Fourier de  $U$  es la función  $\widehat{U}$  definida por<sup>2</sup>

$$\widehat{U}(F_x, F_y) = \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y) e^{2i\pi(xF_x + yF_y)} dx dy, \quad (4.1)$$

donde  $F_x$  y  $F_y$  son las variables conjugadas de  $x$  e  $y$ . Se denomina *frecuencia espacial* la variable vectorial  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ , y se denota su módulo  $F = \|\mathbf{F}\|$ . La dimensión de  $F$  es el inverso de la longitud y se mide en  $\text{mm}^{-1}$  (o a veces por el número de líneas por milímetro).

La transformación de Fourier inversa permite escribir

$$U(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{U}(F_x, F_y) e^{-2i\pi(xF_x + yF_y)} dF_x dF_y. \quad (4.2)$$

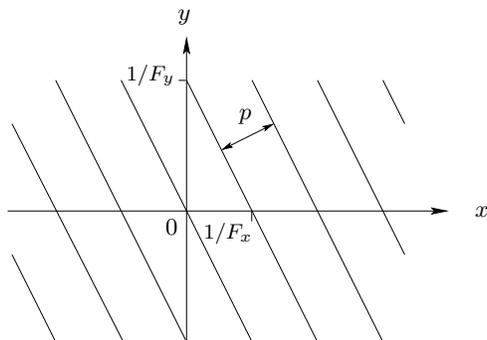
Se emplean también notaciones vectoriales: por ejemplo, si  $\mathbf{r} = (x, y)$ , se denota  $r = \|\mathbf{r}\| = (x^2 + y^2)^{1/2}$  y  $d\mathbf{r} = dx dy$ . Luego las relaciones (4.1) y (4.2) se escriben

$$\widehat{U}(\mathbf{F}) = \int_{\mathbb{R}^2} U(\mathbf{r}) e^{2i\pi\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}} d\mathbf{r}, \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup> Se denota  $U$  la función considerada porque será más adelante la notación para la amplitud del campo eléctrico.

<sup>2</sup> Se define la transformación de Fourier “espacial” con un signo positivo en la función exponencial. La razón es que la fase de las ondas electromagnéticas se escribe en la forma  $\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$  y se refiere a un producto escalar pseudo-euclidiano del espacio-tiempo. En el espacio-tiempo, la transformación de Fourier se define luego en base al mismo producto escalar, véase la nota 1.3.1 p.9. La transformación de Fourier de dos dimensiones espaciales no es más sino una transformación de Fourier parcial, deducida de la transformación espacio-temporal, y por tanto aparece naturalmente el signo positivo en su definición.



**Figura 4.1.** La imagen elemental asociada con la frecuencia espacial  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  tiene crestas ubicadas sobre una red de rectas paralelas. El periodo espacial es  $p$ .

y

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{U}(\mathbf{F}) e^{-2i\pi\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}} d\mathbf{F}. \quad (4.4)$$

La relación (4.2)—o la relación (4.4)—muestra que  $U(x, y)$  se descompone en la base de las funciones exponenciales complejas  $\exp[-2i\pi(xF_x + yF_y)]$ . Tal función representa, aparte de una constante dimensional, la “imagen” elemental asociada con la frecuencia espacial pura  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ .

Para tener una representación intuitiva de la imagen asociada con la frecuencia espacial  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ , considérense los puntos  $(x, y)$  del plano  $z = 0$  que satisfacen  $\exp[-2i\pi(xF_x + yF_y)] = 1$ . Estos puntos son tales que

$$xF_x + yF_y = m, \quad \text{donde } m \in \mathbb{Z}, \quad (4.5)$$

y se reparten sobre un conjunto de rectas paralelas de periodo espacial (fig. 4.1)

$$p = \frac{1}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}} = \frac{1}{F}. \quad (4.6)$$

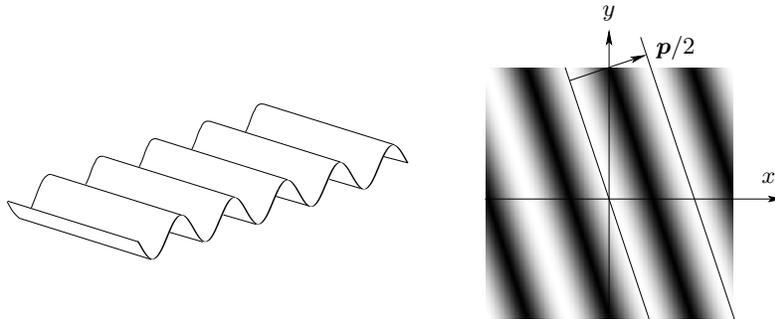
El periodo espacial  $p$  es el módulo del “vector periodo espacial”  $\mathbf{p}$  definido por

$$\mathbf{p} = \frac{1}{F^2}(F_x, F_y). \quad (4.7)$$

Se observa que  $\mathbf{F}\cdot\mathbf{p} = 1$  (en esta relación  $\mathbf{p}$  es el vector periodo espacial asociado con la frecuencia espacial  $\mathbf{F}$ ).

Para una ilustración concreta, se considera la parte real de la imagen compleja asociada con la frecuencia espacial  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  que se representa por

$$U_r(x, y) = \cos[2\pi(xF_x + yF_y)]. \quad (4.8)$$

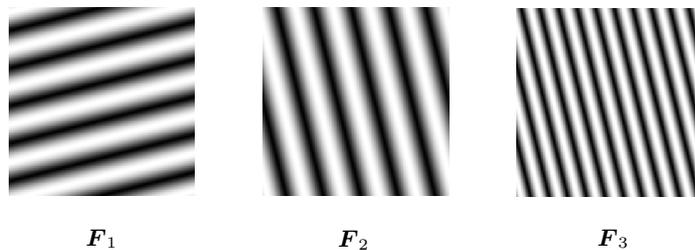


**Figura 4.2.** A la izquierda: una representación esquemática de la amplitud asociada con una frecuencia espacial, en forma de tejas. A la derecha: representación de una función  $\cos^2[2\pi xF_x + yF_y]$ ; el hecho de considerar el cuadrado de la función coseno hace que el periodo espacial es  $p/2$  donde  $p = (F_x/F^2, F_y/F^2)$ .

Luego esta amplitud tiene sus valores extremos sobre una red de rectas paralelas (fig. 4.1). Una representación esquemática de una imagen elemental (o más bien de su parte real) está dada por unas tejas romanas (fig. 4.2), cuyas crestas corresponden a los máximos de la función  $\cos[2\pi(xF_x + yF_y)]$ .

La figura 4.3 ilustra el aspecto bidimensional de las frecuencias espaciales. Se pueden variar el periodo espacial y también la orientación.

La relación (4.2) nos lleva a considerar una imagen, representada por  $U(x, y)$ , como la suma (superposición) de imágenes elementales similares a las tejas de la fig. 4.2, de varios periodos y orientaciones (cada término de la suma se pondera por su coeficiente de Fourier). Se muestran ejemplos en el siguiente parágrafo.

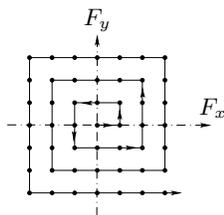


**Figura 4.3.** Aspecto bidimensional de las frecuencias espaciales. Las frecuencias espaciales  $F_1$  y  $F_2$  tienen el mismo módulo ( $F_1 = F_2$ ) y distintas orientaciones. Las frecuencias espaciales  $F_2$  y  $F_3$  tienen misma orientación y módulos distintos:  $F_3 > F_2$ .

## 4.2 Reconstrucción de imágenes

Se utiliza una versión discreta de la relación (4.2) para reconstruir numéricamente una imagen cualquiera a partir de las funciones elementales de la forma  $\exp[-2i\pi\mathbf{F}\cdot\mathbf{r}]$ , donde  $\mathbf{F}$  es una frecuencia espacial. Se calcula primero la transformada de Fourier de la imagen inicial y así se obtienen los coeficientes de Fourier. Para la reconstrucción se suman primero términos de bajas frecuencias espaciales.

En realidad, tanto la función inicial como su espectro están muestreados, es decir conocidos en un conjunto de puntos discretos. La figura 4.4 muestra como se pueden ordenar las frecuencias espaciales para sumar las funciones elementales asociadas (las figuras 4.6-a y 4.6-b no corresponden exactamente a tal orden).



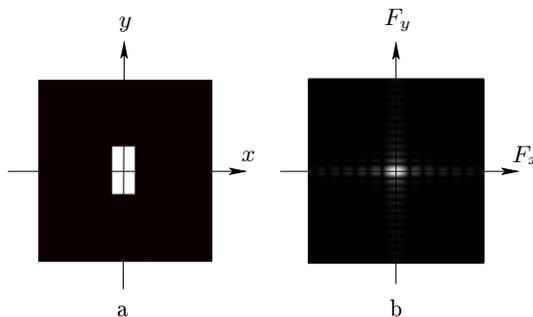
**Figura 4.4.** Un camino posible para ordenar las frecuencias espaciales discretas y sumar las imágenes elementales correspondientes.

La figura 4.5-a muestra la representación gráfica de una función de la forma

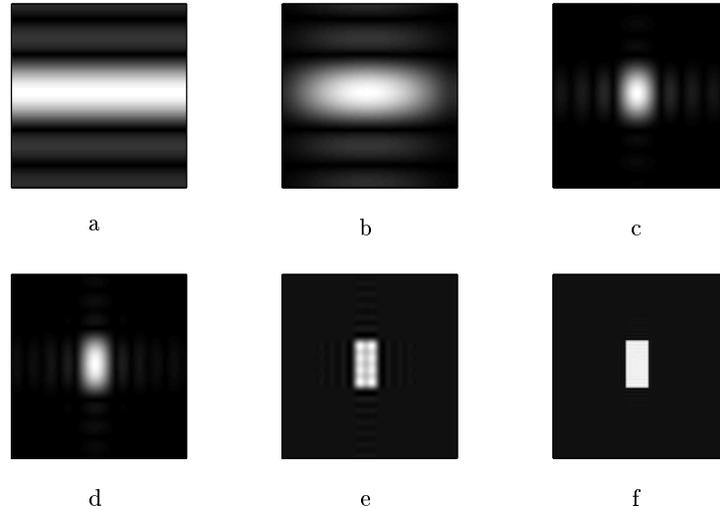
$$f(x, y) = \text{rect}_A(x) \text{rect}_L(y), \quad (4.9)$$

y la figura 4.5-b su espectro (cuadrado de la transformada de Fourier).

Las figuras 4.6-a a 4.6-f muestran las reconstrucciones que se obtienen si se suman números crecientes de funciones elementales. El proceso que se



**Figura 4.5.** Función rectángulo bidimensional (a), y su espectro, es decir, el módulo de su transformada de Fourier al cuadrado (b).



**Figura 4.6.** Reconstrucción de la función rectángulo bidimensional por sumas de funciones elementales asociadas con frecuencias espaciales puras. (a) Suma de 5 funciones elementales correspondientes a puntos del espectro que están sobre la línea  $F_x = 0$  del espectro; (b) Suma de 10 funciones elementales, es decir las anteriores más 5 funciones correspondientes a  $F_y = 0$ ; (c) Suma de 64 funciones elementales; (d) Suma de 100 funciones elementales; (e) Suma de 1089 funciones elementales; (f) Suma de 10 000 funciones elementales.

ilustra aquí no es más sino la extensión a funciones de dos dimensiones (no periódicas) del proceso del párrafo 1.2 que se aplicaba a funciones de una dimensión (periódicas). La figura 4.6 corresponde a la figura 1.2.

La figura 4.7 muestra otro ejemplo a partir de una fotografía con niveles de gris. Se observa que los detalles de la fotografía original aparecen con las altas frecuencias espaciales.



**Figura 4.7.** (a) Fotografía original; (b) Espectro (módulo al cuadrado); (c) Reconstrucción con 121 funciones elementales de baja frecuencia; (d) reconstrucción con 961 funciones elementales; (e) Reconstrucción con 10 201 funciones elementales, de frecuencias espaciales de módulos crecientes.



## 5. Espectro angular

### 5.1 Propagación de la luz: teoría escalar

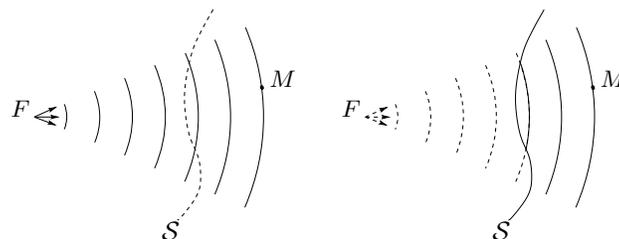
Se aplican los resultados de los capítulos anteriores a la propagación del campo electromagnético en los límites de una teoría escalar, es decir que no se toma en cuenta el aspecto vectorial del anterior campo: se considera solamente el campo eléctrico que es él que se detecta en óptica. En un punto  $P$  del espacio y al instante  $t$  se escribe el campo eléctrico en la forma

$$E(P, t) = U(P) e^{2i\pi\nu_0 t}, \quad (5.1)$$

si se supone que la onda es monocromática (de frecuencia  $\nu_0$ ).

Para problemas de difracción de las ondas monocromáticas, basta con utilizar solamente  $U(P)$ , que se llamará la *amplitud del campo* y a la cual se aplicará el análisis de Fourier.

**Principio de Huygens-Fresnel.** Sea una fuente de luz  $F$  y un punto  $M$  del espacio. La fuente genera en  $M$  un campo electromagnético. Sea  $\mathcal{S}$  una superficie (limitada en la práctica) situada entre la fuente y  $M$  (fig. 5.1). Supóngase que se sabe reproducir sobre  $\mathcal{S}$  el campo generado por  $F$  y quítese la fuente. El principio de Huygens-Fresnel dice que el campo en  $M$  no ha cambiado.



**Figura 5.1.** Según el principio de Huygens-Fresnel, el campo generado en  $M$  es el mismo en las dos situaciones presentadas: a la izquierda, la fuente  $F$  ilumina directamente  $M$ ; a la derecha, se dispone de una superficie  $\mathcal{S}$  sobre la cual el campo es exactamente el que hubiera generado  $F$  si estuviera presente. La superficie  $\mathcal{S}$  actúa como una fuente secundaria.

## 5.2 La asociación entre frecuencia espacial y onda plana

Dados un sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  en el espacio y una onda electromagnética (o luminosa) que se propaga en la dirección  $z$ , sea  $U(x, y)$  ó  $U(\mathbf{r})$  la amplitud del campo en el punto  $\mathbf{r} = (x, y)$  del plano  $z = 0$ . Se hace el análisis de Fourier de  $U$  como se explicó en el capítulo 4: las relaciones (4.1) y (4.2)—o (4.3) y (4.4)—se aplican a la amplitud del campo  $U$ .

Se llega luego a la conclusión de que la amplitud del campo  $U$  en el plano de ecuación  $z = 0$  es la suma de amplitudes de campos elementales representados por las funciones

$$U_0 \exp[-2i\pi\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}] = U_0 \exp[-2i\pi(xF_x + yF_y)], \quad (5.2)$$

donde  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$  es una frecuencia espacial y  $U_0$  una constante dimensional.

Sin embargo en óptica se tiene un resultado más general, según el cual el análisis de Fourier no lleva solamente a una descomposición del campo en el plano  $z = 0$ , sino también a una descomposición de la misma onda incidente sobre el plano anterior en una familia de ondas planas.

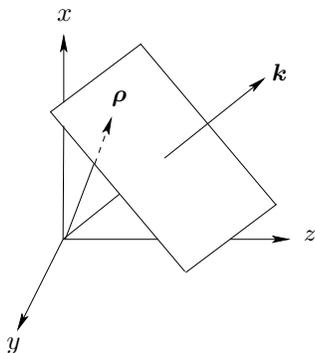
Para entender eso, se empieza con la asociación que existe entre frecuencia espacial y onda plana. Se recuerda que la onda plana monocromática (de frecuencia  $\nu_0$ ) que se propaga en la dirección del vector de onda  $\mathbf{k}$  (fig. 5.2) genera en el punto  $\boldsymbol{\rho} = (x, y, z)$  un campo que se escribe

$$E(\boldsymbol{\rho}, t) = U_0 e^{2i\pi\nu_0 t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}}, \quad (5.3)$$

donde  $U_0$  es una constante dimensional. El vector de onda se escribe

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{s}, \quad (5.4)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda en el medio de propagación considerado y  $\mathbf{s}$  un vector unitario según la dirección de propagación de la onda. Las



**Figura 5.2.** Onda plana propagándose en la dirección del vector de onda  $\mathbf{k}$ . La amplitud compleja en el punto  $\boldsymbol{\rho}$  es proporcional a  $\exp[-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}]$ , y es constante sobre un plano de onda, el cual es ortogonal a  $\mathbf{k}$ .

componentes de  $\mathbf{s}$  en el sistema  $x, y, z$  son los cosenos directores  $\alpha, \beta, \gamma$  definidos como

$$\alpha = \cos \theta_x, \quad \beta = \cos \theta_y, \quad \gamma = \cos \theta_z, \quad (5.5)$$

donde  $\theta_x, \theta_y$  y  $\theta_z$  son los ángulos entre el vector  $\mathbf{s}$  y los ejes  $x, y$  y  $z$ . Puesto que  $\mathbf{s}$  es unitario, se tiene además:  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ .

Finalmente, la amplitud compleja de la onda plana anterior, considerada en el punto  $\boldsymbol{\rho} = (x, y, z)$ , es

$$U(\boldsymbol{\rho}) = U_0 \exp[-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}] = U_0 \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right]. \quad (5.6)$$

Se comparan la relaciones (5.2) y (5.6) y se deduce que la amplitud  $\exp[-2i\pi(xF_x + yF_y)]$  representa el campo generado en  $z = 0$  por la onda plana que se propaga en la dirección dada por

$$\alpha = \lambda F_x, \quad (5.7)$$

$$\beta = \lambda F_y, \quad (5.8)$$

$$\gamma = \sqrt{1 - \lambda^2 F_x^2 - \lambda^2 F_y^2}, \quad (5.9)$$

suponiendo  $1 - \lambda^2 F_x^2 - \lambda^2 F_y^2 \geq 0$ . (El caso  $1 - \lambda^2 F_x^2 - \lambda^2 F_y^2 < 0$  da lugar a una onda evanescente [4].)

**Propiedad fundamental.** Con base en lo anterior y como consecuencia del principio de Huygens-Fresnel, se concluye que la onda que se propaga en la región  $z > 0$  es la misma:

- si el plano  $z = 0$  está iluminado por la onda plana de cosenos directores  $\alpha, \beta, \gamma$  (procedente de la región  $z < 0$ );
- si el campo en el plano  $z = 0$  es el campo asociado con la frecuencia espacial  $(F_x, F_y)$  que satisface las relaciones (5.7–5.9).

El resultado anterior muestra que con cada frecuencia espacial del plano  $z = 0$  se asocia una onda plana cuya dirección de propagación está completamente determinada; esto permite tratar algunos problemas de difracción o analizar los sistemas ópticos como lo veremos.

### 5.3 Frecuencia angular

De hecho, la relación (5.9) muestra que el conocimiento de  $\alpha$  y  $\beta$  es suficiente para determinar la onda plana asociada con la frecuencia espacial  $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ , cuya amplitud se obtiene por la relación (5.6). Se introduce el vector  $\boldsymbol{\Phi}$  de componentes  $(\alpha, \beta)$  en un espacio euclidiano de dos dimensiones, el cual es el espacio de las frecuencias angulares. De las ecuaciones (5.7) y (5.8) se deduce

$$\Phi = (\alpha, \beta) = \lambda F. \quad (5.10)$$

Como  $\gamma$  es el coseno director según  $z$  de la dirección de propagación de la onda plana asociada con  $F$ , se tiene

$$\gamma = \cos \theta_z, \quad (5.11)$$

donde  $\theta_z$  es el ángulo entre  $z$  y  $\mathbf{k}$  (ó  $\mathbf{s}$ ), y luego, de acuerdo con (5.9),

$$|\sin \theta_z| = \lambda F = \Phi = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (5.12)$$

Para los ángulos pequeños se tiene  $\Phi \approx |\theta_z|$ .

El vector  $\Phi$  se llama *frecuencia angular* de la onda plana. La relación (5.10) es importante porque relaciona una característica de la radiación—el ángulo de difracción (de propagación), es decir la frecuencia angular  $\Phi$ —con una característica de la materia radiante—la frecuencia espacial  $F$ .

**Ejemplo 5.3.1** Un detalle de  $5 \mu\text{m}$  sobre un objeto luminoso está llevado por la onda asociada con una frecuencia espacial cuyo módulo es

$$F = \frac{1}{5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}} = 200 \text{ mm}^{-1}. \quad (5.13)$$

A la longitud de onda  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ , este detalle difracta la luz bajo el ángulo

$$\theta_z \approx \Phi = \lambda F = 0,1 \text{ rad} \approx 5^\circ 44'. \quad (5.14)$$

**Nota 5.3.1** Es posible encontrar frecuencias espaciales con componentes negativas. El cambio de componentes a componentes opuestas corresponde a un cambio del vector de onda: simetría respecto al eje  $z$ .

## 5.4 Espectro angular

En lugar de la frecuencia espacial, se puede elegir como magnitud a la frecuencia angular, es decir, a los cosenos directores  $\alpha$  y  $\beta$ . Sea  $V$  la función tal que

$$V(\alpha, \beta) = \frac{1}{\lambda^2} \hat{U} \left( \frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \right), \quad (5.15)$$

o también

$$V(\Phi) = \frac{1}{\lambda^2} \hat{U} \left( \frac{\Phi}{\lambda} \right). \quad (5.16)$$

La relación (4.2) se escribe

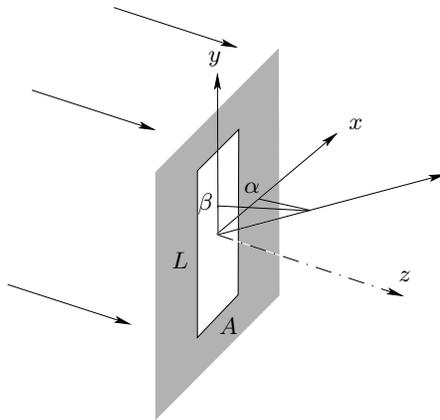
$$U(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} V(\alpha, \beta) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta. \quad (5.17)$$

La función  $V$  representa el *espectro angular*<sup>1</sup> de la onda de amplitud  $U$  en el plano  $z = 0$ . Físicamente el espectro angular corresponde a las diferentes direcciones de propagación de las ondas planas que componen la onda de amplitud  $U$  (o más precisamante las varias direcciones de sus vectores de ondas).

**Interpretación: descomposición de una onda sobre una familia de ondas planas.** El análisis armónico—tal como se desarrolló en la sección 5.2—lleva a representar la amplitud del campo  $U$  en el plano de ecuación  $z = 0$ , como la superposición ponderada de amplitudes elementales (representadas por funciones exponenciales de argumento imaginario), los coeficientes de la ponderación siendo los valores  $\widehat{U}(\mathbf{F})$ . La asociación entre las frecuencias espaciales y las ondas planas lleva a un resultado más general, que involucra la onda incidente sobre el plano  $z = 0$ , y no solamente su amplitud en este mismo plano: cualquier onda incidente sobre el plano  $z = 0$  es la superposición ponderada de ondas planas, y los coeficientes de ponderación estan dados por el espectro angular. Cada onda plana de la descomposición tiene su propia dirección de propagación.

## 5.5 Ejemplos

**Ejemplo 1.** Se ilumina, a la incidencia normal, una abertura rectangular de ancho  $A$  y largo  $L$  por una onda plana monocromática (longitud de onda  $\lambda$ ) de amplitud  $U_0$ . Se busca el espectro angular de la onda que emerge de la abertura (fig. 5.3).



**Figura 5.3.** Abertura rectangular iluminada por una onda plana.

<sup>1</sup> Por razones dimensionales se introduce el factor  $1/\lambda^2$  en la definición del espectro angular:  $V$  se mide en las mismas unidades que  $U$  (Voltios por metro). El factor  $1/\lambda^2$  no aparece en las *Lecciones de óptica de Fourier* [4].

Se toman coordenadas  $x$  e  $y$  en el plano de la abertura (fig. 5.3). La amplitud del campo a la salida de la apertura es

$$U_1(x, y) = U_0 \text{rect}_A(x) \text{rect}_L(y). \quad (5.18)$$

Por transformación de Fourier se obtiene

$$\widehat{U}_1(F_x, F_y) = U_0 AL \frac{\text{sen } \pi AF_x}{\pi AF_x} \frac{\text{sen } \pi LF_y}{\pi LF_y}, \quad (5.19)$$

y el espectro angular es

$$\widehat{V}_1(\alpha, \beta) = \frac{U_0 AL}{\lambda^2} \frac{\text{sen } \frac{\pi A\alpha}{\lambda}}{\frac{\pi A\alpha}{\lambda}} \frac{\text{sen } \frac{\pi L\beta}{\lambda}}{\frac{\pi L\beta}{\lambda}}. \quad (5.20)$$

Como se puede apreciar, la onda difractada por la abertura tiene su amplitud máxima sobre el eje  $z$  que corresponde a  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ . No hay luz en las direcciones  $(\lambda/A, \beta)$ , cualquiera que sea  $\beta$ , ni en las direcciones  $(\alpha, \lambda/L)$ , cualquiera que sea  $\alpha$ .

**Ejemplo 2.** Se considera el caso anterior, pero se supone que la onda incidente ya no es ortogonal al plano de la abertura, sino que se propaga en la dirección de cosenos directores  $(\alpha_0, 0, \gamma_0)$  (es decir que el vector de onda está en el plano  $y-z$ ). La onda incidente genera sobre el plano  $x-y$  la amplitud  $U_0 \exp[-2i\pi\alpha_0 x/\lambda]$  de tal manera que la amplitud inmediatamente detrás de la abertura se escribe

$$U_2(x, y) = U_0 e^{-2i\pi\alpha_0 x} \text{rect}_A(x) \text{rect}_L(y). \quad (5.21)$$

Para facilitar el cálculo de la transformada de Fourier de  $U_2$ , se escribe

$$U_2(x, y) = e^{-2i\pi\alpha_0 x} U_1(x, y), \quad (5.22)$$

donde  $U_1$  está dada por la relación (5.18). Luego se tiene

$$\widehat{U}_2 = \widehat{U}_1 * \delta_{\alpha_0}, \quad (5.23)$$

donde el producto de convolución es unidimensional. Finalmente se obtiene

$$V_2(\alpha, \beta) = V_1 * \delta_{\alpha_0}(\alpha, \beta) = V_1(\alpha - \alpha_0, \beta). \quad (5.24)$$

En forma más explícita

$$\widehat{V}_2(\alpha, \beta) = \frac{U_0 AL}{\lambda^2} \frac{\text{sen } \frac{\pi A(\alpha - \alpha_0)}{\lambda}}{\frac{\pi A(\alpha - \alpha_0)}{\lambda}} \frac{\text{sen } \frac{\pi L\beta}{\lambda}}{\frac{\pi L\beta}{\lambda}}. \quad (5.25)$$

Sea  $\theta_0$  el ángulo entre el eje  $z$  y el vector de onda de la onda de iluminación. Si  $\theta_0$  es pequeño se tiene  $\alpha_0 \approx \theta_0$ . La onda incidente se deduce de la onda incidente normal en una rotación de ángulo  $\theta_0$  alrededor del eje  $y$ . Luego, el espectro angular  $V_2$  se deduce de  $V_1$  en la misma rotación.

**Ejemplo 3.** Se reemplaza la abertura del ejemplo 1 por una transparencia de función de transmisión  $t$  tal que

$$t(x, y) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi F_0 x). \quad (5.26)$$

La amplitud del campo inmediatamente detrás de la transparencia es

$$U_3(x, y) = \frac{U_0}{2}(1 + \cos 2\pi F_0 x), \quad (5.27)$$

cuya transformada de Fourier (bidimensional) es

$$\hat{U}_3(F_x, F_y) = \frac{U_0}{2} \left[ \delta(F_x, F_y) + \frac{1}{2}\delta(F_x - F_0, F_y) + \frac{1}{2}\delta(F_x + F_0, F_y) \right]. \quad (5.28)$$

El espectro angular de la onda que atravesó la transparencia es

$$\begin{aligned} V_3(\alpha, \beta) &= \frac{U_0}{2\lambda^2} \left[ \delta\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\alpha}{\lambda} - F_0, \frac{\beta}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\alpha}{\lambda} + F_0, \frac{\beta}{\lambda}\right) \right] \\ &= \frac{U_0}{2} \left[ \delta(\alpha, \beta) + \frac{1}{2}\delta(\alpha - \lambda F_0, \beta) + \frac{1}{2}\delta(\alpha + \lambda F_0, \beta) \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

La onda emergente está compuesta por tres ondas planas: una es la onda directa y se propaga según  $z$ ; las otras dos son “conjugadas”: una se propaga en la dirección  $(\lambda F_0, 0, \sqrt{1 - \lambda^2 F_0^2})$ , la otra en la dirección  $(-\lambda F_0, 0, \sqrt{1 - \lambda^2 F_0^2})$ .

## 5.6 Propagación del espectro angular

Se supone que  $z$  es la dirección de propagación de la onda considerada. La amplitud del campo en el plano  $z = 0$  es  $U(x, y)$ , o más bien  $U(x, y, 0)$ . Su espectro angular es

$$V_0(\alpha, \beta) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y, 0) \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y) \right] dx dy, \quad (5.30)$$

y aplicando la transformación de Fourier inversa se obtiene

$$U(x, y, 0) = \int_{\mathbb{R}^2} V_0(\alpha, \beta) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta. \quad (5.31)$$

La amplitud del campo sobre el plano paralelo a  $x$ - $y$  a la distancia  $z$  del origen es  $U(x, y, z)$ , y su espectro angular es

$$V_z(\alpha, \beta) = \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbb{R}^2} U(x, y, z) \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y) \right] dx dy. \quad (5.32)$$

Luego

$$U(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^2} V_z(\alpha, \beta) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta. \quad (5.33)$$

La función  $U$  satisface la ecuación de Helmholtz<sup>2</sup> ( $\Delta$  es el laplaciano y  $k$  el módulo del vector de onda)

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (5.34)$$

que se escribe, tomando en cuenta  $\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2$  y  $k = 2\pi/\lambda$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2\gamma^2}{\lambda^2} \right) V_z(\alpha, \beta) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y) \right] d\alpha d\beta = 0. \quad (5.35)$$

La integral en la ecuación (5.35) es una integral de Fourier, y puede ser igual a cero si, y solamente si,

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{4\pi^2\gamma^2}{\lambda^2} \right) V_z(\alpha, \beta) = 0. \quad (5.36)$$

La ecuación (5.36) es una ecuación diferencial en  $z$ , y su integración la rinde a

$$V_z(\alpha, \beta) = V_0(\alpha, \beta) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda} z \gamma \right], \quad (5.37)$$

donde se retiene solamente la exponencial con el signo negativo que representa la onda que se propaga en la dirección de  $z$  positiva. Se constata que la propagación se traduce por un cambio de fase en cada componente del espectro angular.

**Frecuencia de corte.** Lo anterior es válido si

$$1 - \alpha^2 - \beta^2 \geq 0. \quad (5.38)$$

De lo contrario  $\gamma$  se expresa como  $\gamma = i\kappa$ , donde  $\kappa$  es real y negativo ( $\kappa > 0$  no corresponde a la realidad, pues habría una amplificación de la onda). La onda se atenúa muy rápidamente, prácticamente sobre un recorrido del orden de la longitud de onda, y por lo tanto se llama onda evanescente. Si se utilizan las relaciones (5.7) y (5.8), la relación (5.38) se traduce en términos de frecuencias espaciales en la forma

$$F \leq \frac{1}{\lambda}, \quad (5.39)$$

de tal modo que  $1/\lambda$  corresponde al módulo de una frecuencia de corte. Esto significa que una onda electromagnética de longitud de onda  $\lambda$  no puede llevar información correspondiente a detalles menores que  $\lambda$  (no la puede llevar sobre una gran distancia). Sin embargo, cabe notar que las ondas evanescentes son útiles en la práctica: se pueden recuperar, por ejemplo en microscopía en campo cercano, y precisamente tienen la ventaja de representar detalles pequeños más allá de la frecuencia de corte.

<sup>2</sup> La ecuación de Helmholtz es la ecuación de propagación para ondas monocromáticas.

**La difracción-propagación vista como un filtro lineal.** Ahora se examina cómo el espectro angular permite abordar un problema de difracción. De la amplitud del campo  $U_0$  en el plano  $z = 0$  se pasa al espectro angular  $V_0$  (análisis espectral), y luego se considera el efecto de la propagación que se limita a un desfase, lo cual está relacionado con la distancia de propagación  $z$ . La amplitud del campo  $U_z$  a la abscisa  $z$  se obtiene por una transformación de Fourier inversa a partir del espectro angular  $V_z$  (con variables adaptadas).

Prácticamente, para pasar del espectro angular  $V_0$  al espectro angular  $V_z$  se multiplica por la función  $H_z$  tal que

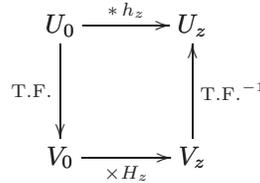
$$H_z(\alpha, \beta) = \exp \left[ -\frac{2i\pi z}{\lambda} \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \right], \quad \text{si } \alpha^2 + \beta^2 \leq 1, \quad (5.40)$$

$$H_z(\alpha, \beta) = 0, \quad \text{si } \alpha^2 + \beta^2 > 1, \quad (5.41)$$

la cual actúa como una función de transferencia en la forma

$$V_z(\alpha, \beta) = H_z(\alpha, \beta) V_0(\alpha, \beta). \quad (5.42)$$

Se concluye que la difracción de un plano a otro es un filtro lineal cuya descripción frecuencial se hace por intermedio de  $H_z$  y del espectro angular. Lo anterior corresponde al camino  $U_0 \rightarrow V_0 \rightarrow V_z \rightarrow U_z$  del siguiente diagrama (donde T.F. representa una transformación de Fourier, y un cambio de variables)



Con variables espaciales, la difracción se traduce por la convolución de la amplitud del campo  $U_0$  (en  $z = 0$ ) con  $h_z$ , el antecedente de Fourier de la función de transferencia  $H_z$  (tal que  $h_z \Leftrightarrow H_z$ ).

**Nota 5.6.1** Ya se vio que  $H_z(\alpha, \beta)$  no vale rigurosamente 0 si  $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ . En este caso existen ondas evanescentes, las cuales se pueden despreciar para una propagación a cierta distancia (grande con respecto a la longitud de onda). El resultado es equivalente a suponer  $H_z(\alpha, \beta) = 0$  si  $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ .



## 6. Elementos de óptica de Fourier

### 6.1 Transformación de Fourier “óptica” (teoría metaxial)

**Emisor y receptor esféricos.** Un problema general de óptica, y más generalmente de electromagnetismo, se relaciona con la transferencia del campo electromagnético desde un emisor hasta un receptor. En la teoría que se expone acá, los emisores y receptores se aproximan por casquetes esféricos<sup>1</sup>. El emisor puede ser un dispositivo que emite la luz, pero puede ser también una esfera aérea que sirve de emisor secundario. También el receptor puede ser un dispositivo que detecta la luz, pero puede ser una esfera aérea que recibe luz. Existen emisores y receptores reales o virtuales, como es habitual en óptica.

Ante todo, hay que saber como localizar un punto sobre un casquete esférico  $\mathcal{A}$  de vértice  $V$  y centro de curvatura  $C$ . El radio de curvatura de  $\mathcal{A}$  es  $R_A = \overline{VC}$  (fig. 6.1), y puede ser positivo o negativo según la convexidad del casquete.

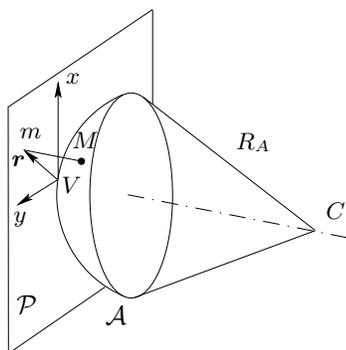


Figura 6.1. Coordenadas sobre un casquete esférico  $\mathcal{A}$ .

Sea  $\mathcal{P}$  el plano tangente a  $\mathcal{A}$  en su vértice  $V$ ; sea  $M$  un punto de  $\mathcal{A}$  y sea  $m$  su proyección ortogonal sobre  $\mathcal{P}$  (fig. 6.1). Se eligen coordenadas ortogonales

<sup>1</sup> El uso de casquetes esféricos necesita aproximaciones de segundo orden con respecto a las variables transversales. Las aproximaciones de primer orden corresponden a la óptica geométrica paraxial; como es mayor de un orden, se habla de óptica metaxial [4].

$x$  e  $y$  sobre  $\mathcal{P}$ , de tal modo que al punto  $m$ , de coordenadas  $(x_m, y_m)$  se asocia el vector  $\mathbf{r} = (x_m, y_m)$ . Si  $\mathcal{A}$  es menos que media esfera, el punto  $m$  es la proyección de un solo punto de  $\mathcal{A}$ : el punto  $M$ ; resulta que las coordenadas de  $m$  pueden servir también de coordenadas para  $M$ . Luego se escribe para la amplitud del campo en  $M$  (teoría escalar)

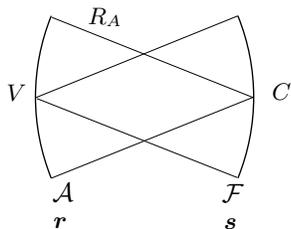
$$U(M) = U_A(x_m, y_m) = U_A(\mathbf{r}), \quad (6.1)$$

donde el índice  $A$  indica que se considera el campo en el punto de coordenadas  $(x_m, y_m)$  sobre la esfera  $\mathcal{A}$ ; esto permite evitar la confusión con el campo en  $m$  que es

$$U(m) = U_P(x_m, y_m) = U_P(\mathbf{r}). \quad (6.2)$$

**Difracción de Fraunhofer.** Sea un emisor  $\mathcal{A}$  de vértice  $V$ , centro  $C$ , radio  $R_A$ ; y sea  $\mathcal{F}$  la esfera de centro  $V$  y vértice  $C$  (fig. 6.2). Se toman coordenadas  $\mathbf{r} = (x, y)$  sobre  $\mathcal{A}$  y  $\mathbf{s} = (\xi, \eta)$  sobre  $\mathcal{F}$ . Se muestra que entre la amplitud del campo  $U_A$  sobre  $\mathcal{A}$  y  $U_F$  sobre  $\mathcal{F}$  existe la relación siguiente<sup>2</sup> [4]

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \widehat{U}_A \left( \frac{\mathbf{s}}{\lambda R_A} \right) = \frac{i}{\lambda R_A} \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda R_A} \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (6.3)$$



**Figura 6.2.** Casquete esférico  $\mathcal{A}$  y su esfera de Fourier. Se pasa de la amplitud del campo sobre  $\mathcal{A}$  a la amplitud sobre  $\mathcal{F}$  por una transformación de Fourier óptica (difracción de Fraunhofer).

La transferencia del campo de  $\mathcal{A}$  hacia  $\mathcal{F}$  corresponde a un fenómeno de *difracción de Fraunhofer*. Se traduce matemáticamente por una transformación de Fourier como lo muestra la relación (6.3). En la realidad la transformada de Fourier de  $U_A$  es  $\widehat{U}_A(\mathbf{F})$  donde  $\mathbf{F}$  es una frecuencia espacial y para obtener  $U_F$  se utilizan variables reducidas, es decir que se reemplaza  $\mathbf{F}$  por  $\mathbf{s}/\lambda R_A$ . Por lo tanto hablamos de *transformación de Fourier óptica* (se incluye el cambio de variables).

La esfera  $\mathcal{F}$  se llama *esfera de Fourier* de  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  es un plano, la esfera  $\mathcal{F}$  está en el infinito y se habla de difracción al infinito.

En conclusión, se observa que en la situación de la figura 6.2 la sola propagación de las ondas electromagnéticas realiza una transformación de Fourier. Otra manera de decir las cosas: la propagación de las ondas electromagnéticas realiza naturalmente un análisis armónico de la amplitud del campo sobre el emisor.

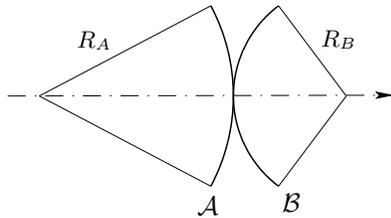
<sup>2</sup> En la relación (6.3) no se escribe un término de fase de la forma  $\exp[-2i\pi R_A/\lambda]$  que representa un retraso debido al tiempo de propagación de la luz de  $V$  a  $C$ .

**Difracción de Fresnel.** Se trata de expresar la transferencia de la amplitud del campo de un emisor esférico cualquiera  $\mathcal{A}$  hacia un receptor esférico cualquiera  $\mathcal{B}$ , a la distancia  $D$ .

Considérese primero un caso particular:  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son tangentes (fig. 6.3), es decir  $D = 0$ . Se muestra la relación [4]

$$U_B(\mathbf{r}) = U_A(\mathbf{r}) \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right], \quad (6.4)$$

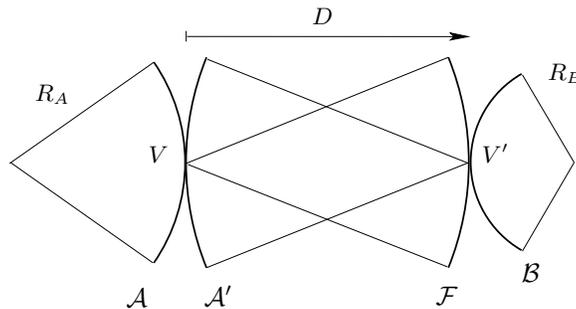
y se dice que se pasa de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  por una transparencia de curvatura.



**Figura 6.3.** Se pasa de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  por una transparencia de curvatura.

El caso general se describe de la manera siguiente. Sea  $\mathcal{A}'$  la esfera tangente a  $\mathcal{A}$  y centrada sobre  $\mathcal{B}$  (fig. 6.4). Su radio de curvatura es  $R_{A'} = D$ . Sea  $\mathcal{F}$  la esfera de Fourier de  $\mathcal{A}'$  (su radio es  $R_F = -D$ ): es tangente a  $\mathcal{B}$  y centrada sobre  $\mathcal{A}$ . La transferencia de la amplitud del campo de  $\mathcal{A}$  hacia  $\mathcal{B}$  se hace en las tres etapas siguientes

1. Transparencia de curvatura de  $\mathcal{A}$  hacia  $\mathcal{A}'$ .
2. Transformación de Fourier óptica de  $\mathcal{A}'$  hacia  $\mathcal{F}$ .
3. Transparencia de curvatura de  $\mathcal{F}$  hacia  $\mathcal{B}$ .



**Figura 6.4.** Difracción de Fresnel. La transferencia general por difracción de un emisor cualquiera  $\mathcal{A}$  hacia un receptor cualquiera  $\mathcal{B}$  es el producto de una transparencia de curvatura de  $\mathcal{A}$  hacia  $\mathcal{A}'$ , de una transformación de Fourier óptica de  $\mathcal{A}'$  hacia  $\mathcal{F}$ , y de otra transparencia de curvatura de  $\mathcal{F}$  hacia  $\mathcal{B}$ .

Matemáticamente, la composición de las tres etapas anteriores lleva a

$$U_B(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] \quad (6.5)$$

$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Se habla de fenómeno de *difracción de Fresnel*: la diferencia con la difracción de Fraunhofer se debe al término de fase cuadrática que figura en la integral de la relación (6.5). Se nota que la transformación de Fourier es la parte central de la propagación del campo. Los términos de fase cuadrática sirven para una adaptación local de las curvaturas; pero es la transformación de Fourier óptica que hace pasar del campo alrededor de  $V$  al campo alrededor de  $V'$ .

**Montajes.** La figura 6.5 muestra el esquema de un montaje de observación de la transformada de Fourier óptica de una función (bidimensional). La fuente  $S$  es monocromática (longitud de onda  $\lambda$ ) y su imagen a través del objetivo  $\mathcal{L}$  es  $S'$ . La función de transmisión de la transparencia  $\mathcal{T}$  es  $t$ . La amplitud del campo sobre la esfera  $\mathcal{A}$ , tangente a  $\mathcal{T}$  y centrada en  $S'$ , es

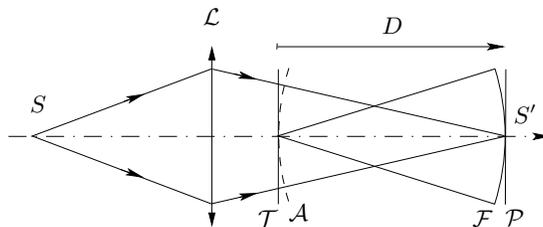
$$U_A(x, y) = U_0 t(x, y), \quad (6.6)$$

donde  $U_0$  es una constante dimensional. La esfera de Fourier de  $\mathcal{A}$  es la esfera  $\mathcal{F}$  que pasa por  $S'$  y que está centrada sobre  $\mathcal{T}$  (o  $\mathcal{A}$ ). La transferencia del campo de  $\mathcal{A}$  hacia  $\mathcal{F}$  corresponde a un fenómeno de difracción de Fraunhofer que se traduce por una transformación de Fourier en la forma

$$U_F(\xi, \eta) = \frac{i}{\lambda D} \widehat{U}_A \left( \frac{\xi}{\lambda D}, \frac{\xi}{\lambda D} \right) = \frac{iU_0}{\lambda D} \widehat{t} \left( \frac{\xi}{\lambda D}, \frac{\xi}{\lambda D} \right), \quad (6.7)$$

donde  $D$  es la distancia de  $\mathcal{T}$  a  $\mathcal{F}$ .

La amplitud del campo sobre el plano  $\mathcal{P}$  que pasa por  $S'$  se deduce de la amplitud del campo sobre  $\mathcal{F}$  por una transparencia de curvatura. Por lo tanto



**Figura 6.5.** Un montaje para observar la difracción de Fraunhofer. La amplitud del campo sobre la esfera  $\mathcal{F}$  es proporcional a la transformada de Fourier de la función de transmisión de la transparencia  $\mathcal{T}$ , y esto traduce un fenómeno de difracción de Fraunhofer entre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{F}$ .

la iluminación<sup>3</sup> sobre  $\mathcal{P}$  es igual a la iluminación sobre  $\mathcal{F}$  y es proporcional al cuadrado de la transformada de Fourier de la función  $t$ ; se tiene

$$I_P(\xi, \eta) = I_F(\xi, \eta) = \frac{|U_0|^2}{\lambda^2 D^2} \left| \hat{t}\left(\frac{\xi}{\lambda D}, \frac{\eta}{\lambda D}\right) \right|^2, \quad (6.8)$$

es decir, la figura de difracción que se observa sobre  $\mathcal{P}$  es la misma que la que se observa sobre  $\mathcal{F}$ .

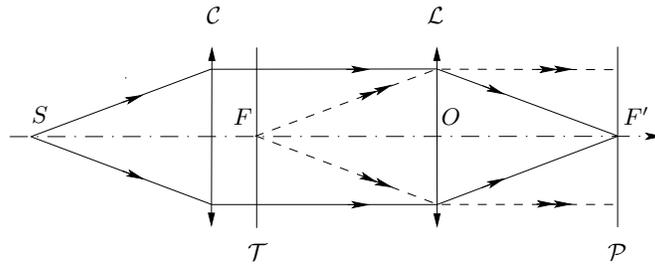
La figura 6.6 muestra un montaje alternativo al de la figura 6.5. El objetivo  $\mathcal{C}$  sirve de colimador (produce una imagen de la fuente a infinito). Para simplificar, el objetivo  $\mathcal{L}$  se representa como una lente delgada de distancia focal  $f' = \overline{OF'}$ , donde  $F'$  es el foco imagen. La imagen de la fuente  $S$  a través de  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{L}$  está en  $F'$ . La transparencia  $\mathcal{T}$  está colocada en el plano focal objeto de  $\mathcal{L}$  (que pasa por el foco objeto  $F$ ).

La amplitud del campo sobre el plano focal imagen de  $\mathcal{L}$  (plano  $\mathcal{P}$ ) es proporcional a la transformada de Fourier de la función de transmisión  $t$  de la transparencia  $\mathcal{T}$ . Se tiene

$$U_P(\xi, \eta) = \frac{iU_0}{\lambda f'} \hat{t}\left(\frac{\xi}{\lambda f'}, \frac{\eta}{\lambda f'}\right), \quad (6.9)$$

donde  $U_0$  es una constante dimensional.

En el montaje de la figura 6.6, la transformación de Fourier se realiza de plano a plano.



**Figura 6.6.** Un montaje alternativo para observar la transformada de Fourier de la función de transmisión de la transparencia  $\mathcal{T}$ . La amplitud del campo sobre el plano  $\mathcal{P}$  es proporcional a la transformada de Fourier de la amplitud sobre  $\mathcal{T}$ .

<sup>3</sup> Los detectores ópticos son cuadráticos: no son sensibles directamente a la amplitud del campo sino a la iluminación asociada, la cual es proporcional al módulo al cuadrado de la amplitud del campo y se mide en  $\text{W}/\text{m}^2$ . Denominamos *intensidad vibratoria* el cuadrado del módulo de la amplitud del campo. Muchas veces se confunden iluminación e intensidad vibratoria.

## 6.2 Formación de las imágenes con luz coherente

**Imagen coherente.** En muchos casos los sistemas ópticos sirven para formar imágenes. En el sentido común, una imagen es una copia del objeto; matemáticamente, la imagen se deduce del objeto en una homotecia. En óptica, el factor de la homotecia es el aumento transversal (véase la sección 2.1). Si se trabaja con luz coherente (luz emitida por un laser) la amplitud de la imagen debe ser una copia de la amplitud del objeto. Por lo tanto la fase en cualquier punto de la imagen debe ser igual a la fase del punto correspondiente sobre el objeto.

Luego se llega al resultado siguiente. Sea  $\mathcal{S}$  un sistema óptico centrado (una lente, un objetivo) y sea  $\mathcal{A}$  un emisor en el espacio objeto, de vértice  $V$  y centro de curvatura  $C$  (fig. 6.7).

La esfera  $\mathcal{A}'$  de vértice  $V'$  y centro  $C'$  es la esfera imagen (o imagen coherente) de  $\mathcal{A}$  si, y solamente si:

- $V'$  es la imagen paraxial de  $V$ ;
- $C'$  es la imagen paraxial de  $C$ ;

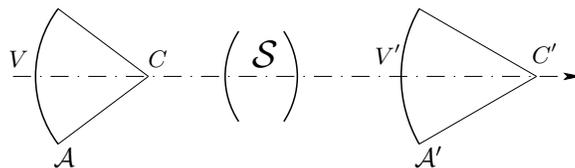
se dice que hay “doble conjugación”. La conjugación de los vértices es la condición que se encuentra también en la óptica geométrica paraxial para ubicar la posición de la imagen. La conjugación de los centros de curvatura es propiamente una condición coherente (o metaxial): es la necesidad de respetar la fase en el proceso de formación de una imagen que impone una curvatura adaptada para la esfera  $\mathcal{A}'$ .

Llamamos *imagen geométrica* a la imagen obtenida sobre  $\mathcal{A}'$ . Su amplitud es

$$U_{AG}(\mathbf{r}') = U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{1}{g_v} U_A \left( \frac{\mathbf{r}'}{g_v} \right), \quad (6.10)$$

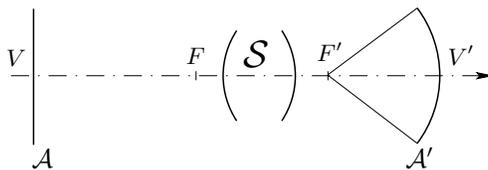
donde  $g_v$  es el aumento transversal en los vértices.

El resultado anterior justifica el empleo de emisores y receptores esféricos. De hecho, sea  $\mathcal{S}$  un sistema centrado con focos, y sea un objeto plano  $\mathcal{A}$  que pasa por  $V$  (fig. 6.8). ¿Cuál es la imagen  $\mathcal{A}'$  de  $\mathcal{A}$ ? Por conjugación de los vértices se obtiene que  $\mathcal{A}'$  pasa por  $V'$ , la imagen paraxial de  $V$ . Además,



**Figura 6.7.** Imagen coherente por un sistema centrado cualquiera  $\mathcal{S}$ . Hay una doble conjugación de los vértices y de los centros de curvatura, entre  $\mathcal{A}$  y su imagen  $\mathcal{A}'$ .

como  $\mathcal{A}$  es un plano, su centro de curvatura está en el infinito; luego, por conjugación de los centros de curvatura, se obtiene que el centro de curvatura de  $\mathcal{A}'$  está en el foco imagen  $F'$  del sistema  $\mathcal{S}$ . Es decir que  $\mathcal{A}'$  es propiamente una esfera. La formación de una imagen coherente no puede ser de plano a plano (para un sistema con focos). De ahí la necesidad de introducir casquetes esféricos; éstos incluyen los planos como casos particulares. Solamente un sistema afocal da una imagen plana de un objeto plano.



**Figura 6.8.** La imagen coherente de un emisor plano por un sistema centrado con focos es una esfera centrada en el foco imagen del sistema.

**Efecto de la pupila.** En realidad, los sistemas ópticos tienen una extensión transversal limitada: existe una abertura que limita los “rayos” originados en el objeto que pueden pasar a través del sistema. Se llama pupila a esa abertura. Se describe la pupila por la *función pupila*  $\mathfrak{p}$  que vale 1 sobre la pupila y 0 por fuera (la función pupila es la función de transparencia de la pupila); más generalmente puede ser una función de fase en la forma  $\mathfrak{p}(x, y) = \exp[-i\pi\varphi(x, y)]$ .

Sea  $\mathcal{A}$  un objeto a la distancia  $d$  de la pupila ( $d$  se toma de la pupila hasta el objeto), y sea  $\mathcal{A}'$  la esfera imagen de  $\mathcal{A}$ . Se introduce la función  $h$ , definida por<sup>4</sup>

$$h(\mathbf{r}) = \frac{1}{\lambda^2 d^2} \widehat{\mathfrak{p}}\left(\frac{\mathbf{r}}{\lambda d}\right). \quad (6.11)$$

Debido a la difracción por la pupila, se muestra que la amplitud del campo sobre  $\mathcal{A}'$  no es  $U_{AG}$  tal como aparece en la relación (6.10) sino

$$U_{A'} = h * U_{AG}, \quad (6.12)$$

es decir

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \int_{\mathbb{R}^2} U_{AG}(\mathbf{r}) h(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (6.13)$$

La imagen “física” se obtiene haciendo el producto de convolución de la amplitud de la imagen geométrica con una función proporcional a la transformada de Fourier de la función pupila<sup>5</sup>.

<sup>4</sup> En realidad, el aumento transversal en los vértices  $g_v$  aparece en la expresión de  $h(\mathbf{r})$  [4]; no lo escribimos para simplificar.

<sup>5</sup> En todo rigor, este resultado vale solamente si  $\mathcal{A}$  está centrada sobre la pupila. En otros casos, es una aproximación [4].

La función  $h$  aparece como una respuesta de impulso, y el sistema  $\mathcal{S}$  como un filtro lineal (espacial).

En resumen, un objetivo es un filtro lineal cuya respuesta de impulso es la transformada de Fourier de la función pupila (aparte de un cambio de variable). Este resultado es un gran clásico de la óptica moderna.

**Filtrado de las frecuencias espaciales por un objetivo.** Puesto que un objetivo es un filtro lineal, se puede describir su efecto en el dominio de las frecuencias espaciales, e introducir su función de transferencia. Por definición es la función  $H$ , la transformada de Fourier<sup>6</sup> de la respuesta de impulso  $h$

$$h \rightleftharpoons H. \quad (6.14)$$

Como  $h$  es la transformada de Fourier de la función pupila, la función  $H$  es la función pupila, aparte un cambio de signo de la variable. Más precisamente, se deduce de la relación (6.11)

$$H(\mathbf{F}) = \mathbf{p}(-\lambda d \mathbf{F}). \quad (6.15)$$

El resultado anterior tiene una interpretación sencilla que es la siguiente: sea  $\mathbf{F}$  una frecuencia espacial del objeto; le corresponde la frecuencia angular  $\Phi = \lambda \mathbf{F}$ . Sean  $O$  el centro del objeto,  $P$  el centro de la pupila, y  $M$  el punto de la pupila tal que

$$OM = OP - \Phi d = OP - \lambda F d, \quad (6.16)$$

es decir que la recta  $OM$  está paralela a la dirección de propagación de la onda plana asociada con  $\mathbf{F}$  (hay un signo menos en la relación anterior porque  $d = \overline{PO} < 0$ ). En el plano de la pupila, las coordenadas de  $M$  son dadas por el vector

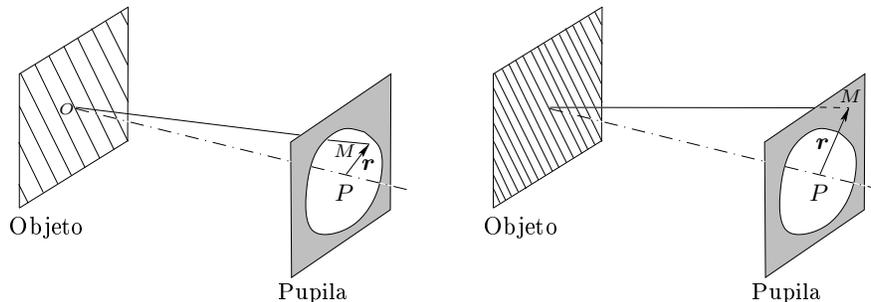
$$OM = \mathbf{r} = -\lambda d \mathbf{F}. \quad (6.17)$$

Dos casos se presentan, resumidos por la figura 6.9:

1. Si  $M$  está en la pupila, tenemos  $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = 1$ , por definición de la función pupila. Luego  $H(\mathbf{F}) = 1$ , como consecuencia de la relación (6.15). La frecuencia espacial está resuelta por el objetivo: el campo elemental asociado con  $\mathbf{F}$ , de la forma  $\exp[-2i\pi \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}]$ , está transmitido por el objetivo.
2. Si  $M$  está por fuera de la pupila,  $\mathbf{p}(\mathbf{r}) = 0$  y luego  $H(\mathbf{F}) = 0$ . La frecuencia espacial  $\mathbf{F}$  no está resuelta por la pupila. El campo elemental asociado con esta frecuencia no está transmitido.

En consecuencia, un objetivo es un filtro lineal pasabajo. Si la pupila es anular (es el caso de un telescopio con ocultación central), el sistema es un filtro pasabanda.

<sup>6</sup> Es una transformación de Fourier bidimensional, con variables espaciales.



**Figura 6.9.** A la izquierda: el rayo  $OM$  entra en la pupila; la frecuencia espacial asociada con la dirección  $OM$  está resuelta por el objetivo. A la derecha:  $OM$  no entra en la pupila; la frecuencia espacial no está resuelta.

En el proceso de la formación de una imagen, hay un filtrado de las frecuencias espaciales del objeto, el cual se realiza en el plano de la pupila. La imagen tiene necesariamente una resolución limitada porque las frecuencias espaciales altas no están transmitidas por el objetivo. Se tiene acá una razón fundamental por la cual se busca construir objetivos con la apertura más grande posible para tener gran resolución. En la práctica, la fabricación de un instrumento con gran apertura es difícil porque las aberraciones aumentan con la apertura (la aberración esférica en particular).

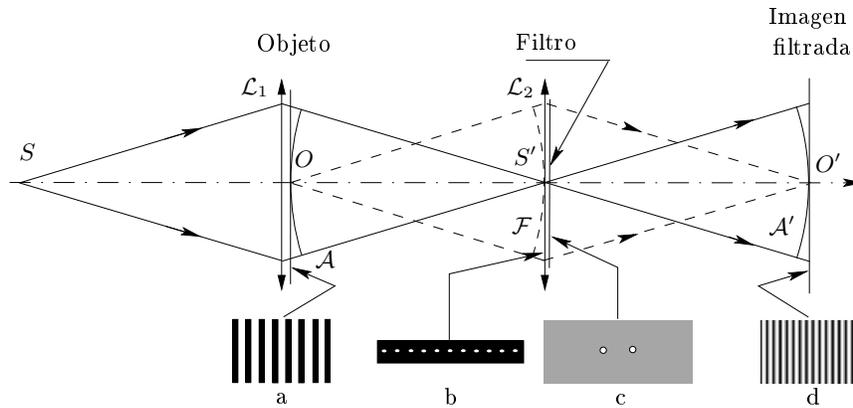
### 6.3 Filtrado de las frecuencias espaciales

El filtrado de las frecuencias espaciales por un objetivo es un caso particular de un proceso más general que se describe en la presente sección a través de varios ejemplos.

**Principio.** La figura 6.10 muestra un montaje de filtrado de las frecuencias espaciales.

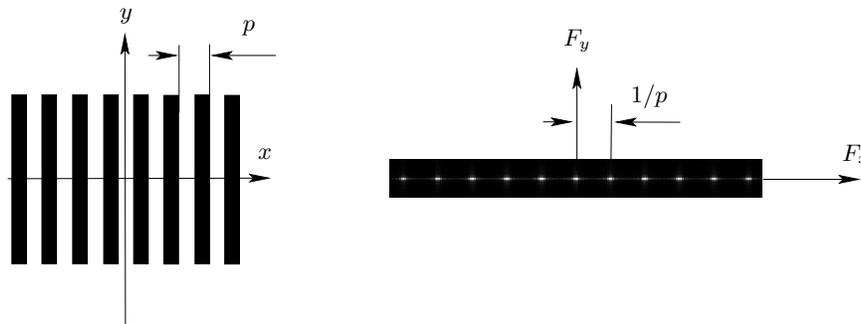
El objeto es una transparencia cuya función de transmisión es una función cuadrada periódica. La fuente  $S$  es monocromática. Los objetivos  $\mathcal{L}_1$  y  $\mathcal{L}_2$  se representan como lentes delgadas para simplificar. El objetivo  $\mathcal{L}_1$  proyecta la fuente  $S$  sobre  $\mathcal{L}_2$ , en  $S'$ . El objeto a filtrar se coloca sobre  $\mathcal{L}_1$  (en  $O$ ) y está iluminado en luz convergente, de tal modo que su transformada de Fourier óptica se forma sobre la esfera  $\mathcal{F}$  tangente a  $\mathcal{L}_2$  y centrada en  $O$ . Es decir que se “materializa” el espectro del objeto en el plano<sup>7</sup> de  $\mathcal{L}_2$  y es en este plano que se coloca el filtro. El objetivo  $\mathcal{L}_2$  forma la imagen del objeto en  $O'$ , la imagen paraxial de  $O$ .

<sup>7</sup> Es cómodo llamar *plano de Fourier* el plano de la lente  $\mathcal{L}_2$ , aunque la transformada de Fourier del objeto se forma sobre la esfera de Fourier  $\mathcal{F}$ . La iluminación es la misma sobre este plano que sobre la esfera de Fourier



**Figura 6.10.** Filtrado óptico de las frecuencias espaciales correspondiente a las figuras 6.11 y 6.12. El filtro se coloca en el “plano de Fourier” del objeto, es decir sobre el objetivo  $\mathcal{L}_2$ . (a) Objeto. (b) Espectro. (c) Filtro. (d) Imagen del objeto filtrado.

Cabe notar que el proceso de filtrado concierne la amplitud del campo y su transformada de Fourier. Sin embargo en la figura 6.11 se representan la intensidad vibratoria del objeto (su perfil es una función cuadrada periódica<sup>8</sup>, según un eje  $x$ ) y su espectro, es decir, el módulo al cuadrado de su transformada de Fourier (bidimensional). El objeto se considera como infinito, de tal manera que su espectro se compone de puntos repartidos periódicamente sobre el eje  $F_x$ . Si  $p$  es el periodo fundamental del objeto, el periodo de su espectro es  $1/p$ .



**Figura 6.11.** Un objeto cuyo perfil es una función cuadrada periódica (a la izquierda) y su espectro (módulo al cuadrado, a la derecha).

<sup>8</sup> En este caso particular, la amplitud del campo sobre el objeto se representa por la misma función que su intensidad vibratoria, aparte un factor dimensional.

En términos generales, el análisis del filtrado es el siguiente. Si  $t$  es la función de transmisión del objeto, la amplitud del campo sobre la esfera  $\mathcal{A}$  tangente al objeto y centrado en  $S'$  (fig. 6.10) es

$$U_A(\mathbf{r}) = U_0 t(\mathbf{r}), \quad (6.18)$$

donde  $U_0$  es una constante dimensional. La amplitud del campo sobre la esfera de Fourier  $\mathcal{F}$  es

$$U_F(\mathbf{s}) = \frac{-iU_0}{\lambda d} \hat{t}\left(-\frac{\mathbf{s}}{\lambda d}\right), \quad (6.19)$$

donde  $d = \overline{S'O}$ . (Los signos menos en la relación (6.19) se deben a que el radio de curvatura de  $\mathcal{A}$  es  $R_A = -d$ .) La imagen de la esfera  $\mathcal{F}$  es la esfera  $\mathcal{F}'$  tangente a  $\mathcal{L}_2$  y centrada en  $O'$ ; la amplitud del campo sobre  $\mathcal{F}'$  es

$$U_{F'}(\mathbf{s}) = U_F(\mathbf{s}). \quad (6.20)$$

Finalmente, la amplitud del campo sobre la esfera imagen  $\mathcal{A}'$  (centrada sobre  $\mathcal{L}_2$  y que pasa por  $O'$ ) es

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = \frac{i}{\lambda d'} \hat{U}_{F'}\left(\frac{\mathbf{r}'}{\lambda d'}\right). \quad (6.21)$$

donde  $d' = \overline{S'O'}$ .

Si no hay filtro sobre  $\mathcal{L}_2$ , las relaciones (6.19), (6.20) y (6.21) llevan a

$$U_{A'}(\mathbf{r}') = U_0 \frac{d}{d'} t\left(\mathbf{r}' \frac{d}{d'}\right) = \frac{1}{a} t\left(\frac{\mathbf{r}'}{a}\right), \quad (6.22)$$

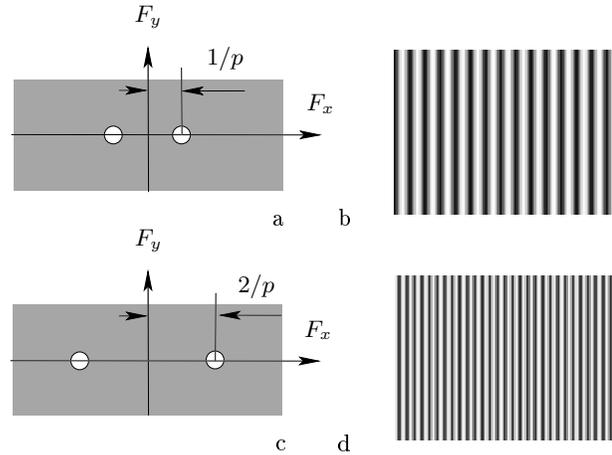
donde  $a = d'/d$  es el aumento transversal de la conjugación entre  $O$  y  $O'$ . La amplitud del campo sobre  $\mathcal{A}'$  es la imagen de la función de transmisión del objeto.

En lo anterior se supone que las aberturas de los objetivos son suficientemente grandes para no limitar las frecuencias espaciales de los objetos estudiados.

El filtro modifica la parte del espectro del objeto que pasa a través de  $\mathcal{L}_2$  y por tanto cambia el aspecto de la imagen que se obtiene. Por ejemplo, si se filtra el espectro como lo muestra la figura 6.12-a, se dejan pasar solamente dos puntos laterales distantes de  $1/p$  del punto central. La amplitud del campo sobre la esfera imagen  $\mathcal{A}'$  centrada sobre  $\mathcal{L}_2$  se describe por la función

$$t_1(x', y') = \cos \frac{2\pi x'}{p}, \quad (6.23)$$

aparte de un factor de homotecia (el aumento transversal se supone tal que  $|a| = 1$ ). La iluminación sobre esa esfera es igual a la iluminación sobre el plano ortogonal al eje óptico que pasa por  $O'$ , y es proporcional a



**Figura 6.12.** Filtrado del objeto de la fig. 6.11. (a) y (c) Filtros. (b) y (d) Imágenes del objeto filtrado.

$$|t_1(x', y')|^2 = \cos^2 \frac{2\pi x'}{p} = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{4\pi x'}{p} \right). \quad (6.24)$$

La figura 6.12–b muestra el aspecto de la imagen filtrada. Hay un fondo uniforme y una modulación senoidal de frecuencia doble de la frecuencia fundamental del objeto inicial, como lo muestra la relación (6.24).

El filtro de la figura 6.12–c deja pasar dos puntos distantes de  $2/p$  del punto central. La figura 6.12–d muestra la imagen obtenida, cuya amplitud es proporcional

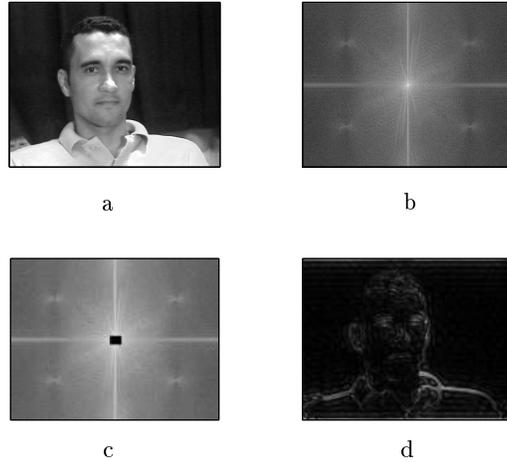
$$t_2(x, y) = \cos \frac{4\pi x}{p}. \quad (6.25)$$

y cuya iluminación es proporcional a

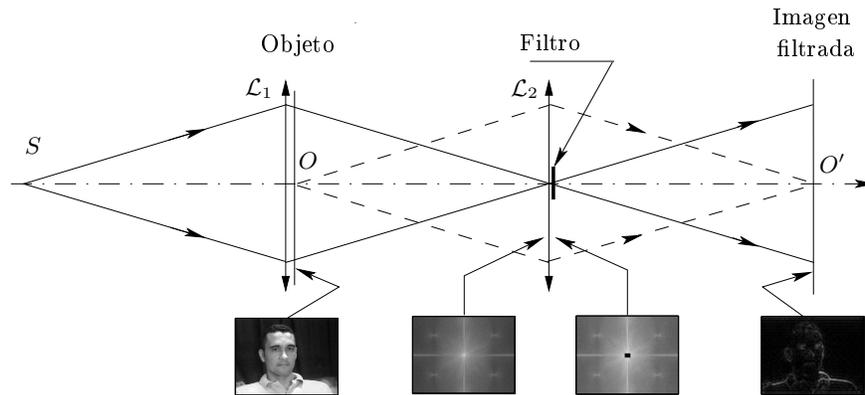
$$|t_2(x, y)|^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos \frac{8\pi x}{p} \right). \quad (6.26)$$

**Ejemplo.** La figura 6.13 muestra como se modifica una imagen cuando se filtran las frecuencias espaciales. La figura 6.13–c muestra que el filtro (el cuadrado oscuro en el centro de la figura) quita las frecuencias espaciales bajas; por lo tanto el filtro considerado es un filtro (lineal) pasaalto. La figura 6.13–d muestra la imagen filtrada. Solamente aparecen las altas frecuencias espaciales. En práctica aparecen los contornos de la imagen inicial. Este tipo de filtrado es comparable a la técnica de la estrioscopia, estudiada más adelante y que se aplica a objetos de fase.

La figura 6.14 muestra el montaje óptico de filtrado de las frecuencias espaciales. Es el mismo que el montaje de la fig. 6.10; solamente cambia el filtro.



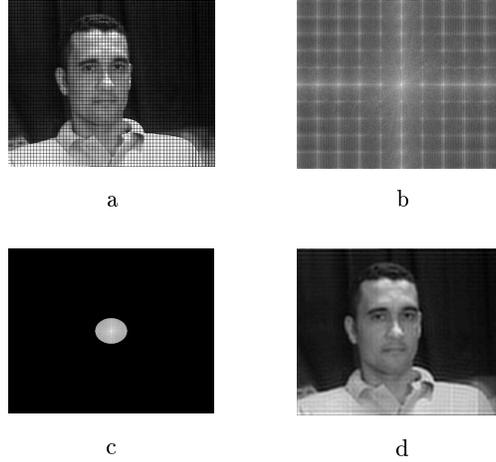
**Figura 6.13.** Filtrado de las frecuencias espaciales. (a) Fotografía original; (b) Espectro (módulo al cuadrado) ; (c) Espectro filtrado por un filtro pasaalto; (d) Imagen filtrada.



**Figura 6.14.** Filtrado óptico de las frecuencias espaciales, correspondiente a la figura 6.13. El montaje es el mismo que en la fig. 6.10, sólo cambia el filtro.

Se pueden colocar varios tipos de filtros en el “plano” de Fourier. Se muestra el efecto de unos en los párrafos siguientes.

**Filtro pasabajo.** La figura 6.15 muestra un ejemplo de filtro lineal pasabajo. A la fotografía original se añadieron unas líneas horizontales y verticales (fig. 6.15-a) que se traducen en el espacio de Fourier por una convolución del espectro inicial con una peñilla de Dirac (fig. 6.15-b). Un filtro pasabajo (fig. 6.15-c) deja pasar solamente la parte central del espectro que se confunde con el espectro de la fotografía inicial, la cual se recupera en la imagen final (fig. 6.15-d).



**Figura 6.15.** Efecto de un filtro pasabajo sobre la imagen de un objeto (simulación numérica). Aquí se quitan las líneas horizontales y verticales del objeto inicial. (a) Original; (b) Espectro (módulo al cuadrado); (c) Filtro pasabajo; (d) Imagen filtrada.

**Filtro parabólico.** Un filtro de transparencia parabólica permite obtener en el plano de la imagen el laplaciano de la función de transmisión del objeto. Es una consecuencia de las siguientes relaciones. De

$$U(x, y) \rightleftharpoons \hat{U}(F_x, F_y), \quad (6.27)$$

se deduce

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, y) \rightleftharpoons -4\pi^2 F_x^2 \hat{U}(F_x, F_y), \quad (6.28)$$

y luego ( $\Delta$  es el laplaciano en dos dimensiones)

$$\Delta U(x, y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(x, y) \rightleftharpoons -4\pi^2 (F_x^2 + F_y^2) \hat{U}(F_x, F_y). \quad (6.29)$$



**Figura 6.16.** Efecto de un filtro parabólico (simulación numérica): (a) Imagen original; (b) Imagen filtrada. Se invirtió el contraste para mejor visibilidad.

Multiplicar la transformada de Fourier bidimensional de  $U$  por  $-4\pi^2 F^2$  es equivalente a aplicar el operador laplaciano a  $U$ .

La imagen obtenida por esa técnica se compone de los contornos del objeto inicial (véase la fig. 6.16).

**Filtro inverso.** La figura 6.17-a muestra una imagen borrosa que corresponde por ejemplo a un movimiento de la cámara fotográfica durante la exposición. Si el movimiento corresponde a un desplazamiento rectilíneo de amplitud  $\ell$  y si  $U$  representa la imagen que se esperaba (es decir, sin mover), se grava en realidad

$$U_1(x, y) = [U(x', y') * \text{rect}_\ell(x') \delta(y')](x, y), \quad (6.30)$$

a condición de elegir el eje  $x$  según el desplazamiento. Por transformación de Fourier se obtiene

$$\hat{U}_1(F_x, F_y) = \hat{U}(F_x, F_y) \frac{\text{sen } \pi \ell F_x}{\pi F_x}. \quad (6.31)$$

Se puede recuperar  $U$  a partir de  $U_1$  por un filtro inverso: se multiplica la transformada de Fourier de  $U_1$  por  $\pi F_x / \text{sen } \pi \ell F_x$ .

Surge un problema: la función  $F_x \mapsto \pi F_x / \text{sen } \pi \ell F_x$  tiene polos, es decir, es infinita si  $F_x = q/\ell$ , donde  $q$  es un número entero. En consecuencia el filtro inverso ideal no existe; pero se puede aproximar: en la vecindad de cada polo se toma igual a cero la función de transmisión del filtro. La figura 6.17 muestra el resultado que se puede obtener por este método.



**Figura 6.17.** Mejoramiento de una imagen borrosa por un filtro inverso.

**Estrioscopia.** El montaje de la figura 6.14 es un montaje general de filtrado óptico. Cuando el filtro es una pequeña pantalla opaca, se obtiene un montaje de estrioscopia: permite eliminar las bajas frecuencias de un objeto y hacer sobresalir los detalles. La técnica de la estrioscopia se emplea para ver objetos de fase, es decir objetos cuya función de transparencia se escribe como

$$t(x, y) = e^{-i\varphi(x, y)}. \quad (6.32)$$

Un objeto de fase no es visible porque su intensidad vibratoria es una constante: el campo emergente del objeto iluminado por una onda plana se escribe

$$U(x, y) = U_0 t(x, y), \quad (6.33)$$

y por tanto  $I(x, y) = |U(x, y)|^2 = |U_0|^2$ .

La función de fase  $\varphi$  se descompone en dos funciones  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  cuyos espectros tienen dominios complementarios. Se escribe

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y), \quad (6.34)$$

con

$$\hat{\varphi}_1(F_x, F_y) = 0, \quad \text{si } F_x^2 + F_y^2 \geq F_0^2, \quad (6.35)$$

$$\hat{\varphi}_2(F_x, F_y) = 0, \quad \text{si } F_x^2 + F_y^2 < F_0^2, \quad (6.36)$$

donde  $F_0$  es una constante. Si las variaciones de la fase son pequeñas, se escribe la amplitud del objeto en la forma

$$U(x, y) \approx U_0 [1 - i\varphi(x, y)] = U_0 [1 - i\varphi_1(x, y) - i\varphi_2(x, y)], \quad (6.37)$$

y luego

$$\hat{U}(F_x, F_y) \approx U_0 [\delta(F_x, F_y) - i\hat{\varphi}_1(F_x, F_y) - i\hat{\varphi}_2(F_x, F_y)]. \quad (6.38)$$

El filtro opaco se ajusta para dejar pasar solamente la parte del espectro que corresponde a  $\varphi_2$  (que contiene las altas frecuencias). Todo pasa como si se tuviera un objeto cuya transformada de Fourier es

$$\hat{U}_F(F_x, F_y) = -U_0 i\hat{\varphi}_2(F_x, F_y). \quad (6.39)$$

La amplitud de la imagen filtrada se escribe

$$U_F(x', y') = U_0 \varphi_2(x', y'), \quad (6.40)$$

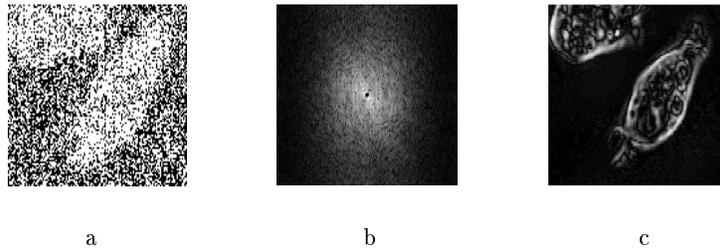
a parte de un posible término de fase y de un aumento transversal. La función  $\varphi_2$  contiene las frecuencias espaciales más altas del objeto inicial, es decir, los detalles más finos del objeto. La iluminación (intensidad vibratoria) de la imagen filtrada es

$$I_F(x', y') = |U_0|^2 |\varphi_2(x', y')|^2, \quad (6.41)$$

y no es más constante. Finalmente se observan, en el plano de la imagen, los detalles del objeto de fase inicial.

**Contraste de fase.** El mismo principio de la espectroscopía se aplica al contraste de fase (inventado por F. Zernike en 1935, premio Nobel de física en 1953): se reemplaza la pantalla opaca por una lamina de fase (la diferencia de fase introducida vale  $\pi/2$ ); la imagen final es más luminosa que la que se obtiene en estrioscopia. La figura 6.18 muestra un ejemplo. Normalmente un objeto de fase ¡no se ve! Por tanto, para dar una idea del objeto, se representa su fase, aproximada por 0 (parte oscuras) ó  $\pi$  (parte blancas), véase la fig. 6.18–a.

La mayoría de los microscopios que se utilizan en biología tienen por construcción un dispositivo de contraste de fase (o a veces de contraste interferencial).



**Figura 6.18.** Imagen obtenida por la técnica del contraste de fase (simulación numérica): (a) Objeto; (b) Espectro y filtro de fase (el filtro ocupa el espacio del pequeño cuadro oscuro al centro de la figura); (c) Imagen filtrada.



## 7. Espectro angular esférico

### 7.1 Noción de espectro angular esférico

La noción de espectro angular esférico es una generalización del espectro angular a emisores y receptores esféricos tal como se encuentran en la óptica metaxial. Su introducción reciente<sup>1</sup> permite resolver una paradoja que se encuentra en la teoría clásica de la formación de las imágenes.

Sea  $U_A$  la amplitud del campo sobre un emisor (o receptor) esférico  $\mathcal{A}$ . Se define el espectro angular esférico de la amplitud del campo sobre  $\mathcal{A}$  por

$$W_A(\boldsymbol{\Phi}) = \frac{1}{\lambda^2} \hat{U}_A \left( \frac{\boldsymbol{\Phi}}{\lambda} \right). \quad (7.1)$$

Formalmente, la relación (7.1) no es más que la relación (5.16); lo que cambia ahora es que el emisor es esférico, y antes era un plano (véase el capítulo 5). El vector  $\boldsymbol{\Phi}$  es la frecuencia angular y  $\mathbf{F} = \boldsymbol{\Phi}/\lambda$  es la frecuencia espacial correspondiente sobre el emisor (o receptor).

La relación (7.1) se invierte y lleva a

$$U_A(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^2} W_A(\boldsymbol{\Phi}) \exp \left[ -\frac{2i\pi}{\lambda} \boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r} \right] d\boldsymbol{\Phi}, \quad (7.2)$$

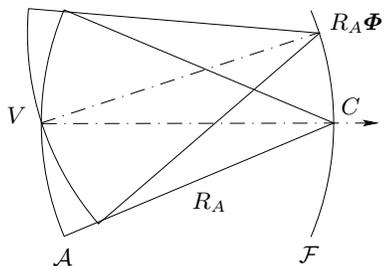
que muestra que la amplitud del campo sobre  $\mathcal{A}$  es la superposición de campos elementales de la forma  $\exp[-(2i\pi/\lambda)\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r}]$ .

¿Qué representa una amplitud  $\exp[-(2i\pi/\lambda)\boldsymbol{\Phi} \cdot \mathbf{r}]$  sobre  $\mathcal{A}$ ? Se muestra que es la amplitud del campo generado sobre  $\mathcal{A}$  por la onda esférica que converge al punto  $\mathbf{s} = R_A \boldsymbol{\Phi}$  de la esfera de Fourier de  $\mathcal{A}$  (fig. 7.1).

En consecuencia, la relación (7.2) lleva a considerar la onda emitida por  $\mathcal{A}$  como la suma ponderada de ondas esféricas que convergen sobre la esfera de Fourier de  $\mathcal{A}$ .

Si  $\mathcal{A}$  se vuelve un plano, el espectro angular esférico se vuelve el espectro angular (plano) tal como se estudió en el capítulo 5.

<sup>1</sup> Véase: P. Pellat-Finet, P.-E. Durand, “La notion de spectre angulaire sphérique”, *Comptes Rendus Physique* **7** (2006) 457–463; P. Pellat-Finet, P.-E. Durand, É. Fogret, “Spherical angular spectrum and the fractional Fourier transform”, *Optics Letters* **31** (2006) 3429–3431.

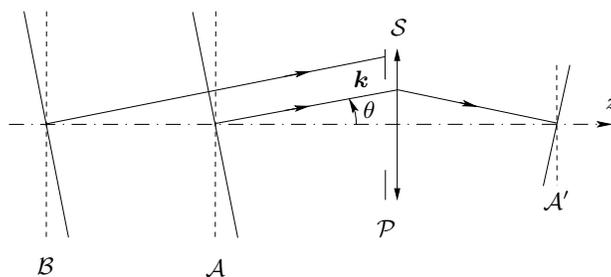


**Figura 7.1.** La amplitud  $\exp[-(2i\pi/\lambda)\Phi\cdot\mathbf{r}]$  sobre  $\mathcal{A}$  es la amplitud de la onda esférica que converge al punto  $R_A\Phi$  de la esfera de Fourier de  $\mathcal{A}$ .

## 7.2 Aplicación al estudio de la formación de las imágenes

Existe una paradoja en la teoría clásica de la formación de las imágenes tal como se formuló en el capítulo 6 que se puede entender a partir de la figura 7.2. Sean dos objetos planos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , este último estando más alejado del objetivo  $\mathcal{S}$ . Se considera una misma frecuencia espacial  $\mathbf{F}$  sobre  $\mathcal{A}$  y sobre  $\mathcal{B}$ . Se aplica el método de la sección 6.2 para saber si el sistema resuelve a  $\mathbf{F}$ . Primero se asocia a  $\mathbf{F}$  una dirección de propagación que hace el ángulo  $\theta$  con el eje óptico  $z$  del objetivo. Se supone que el objetivo resuelve a  $\mathbf{F}$  sobre  $\mathcal{A}$  y no sobre  $\mathcal{B}$ , tal como lo muestra la figura 7.2: el rayo que pasa por el centro de  $\mathcal{A}$  y que hace el ángulo  $\theta$  con  $z$  entra en la pupila  $\mathcal{P}$ ; no es el caso del rayo equivalente para  $\mathcal{B}$ .

Lo anterior corresponde bien a la realidad experimental. Sin embargo la paradoja viene de que a  $\mathbf{F}$  se le asocia la misma onda plana, tanto para  $\mathcal{A}$  como para  $\mathcal{B}$ . En un caso la onda forma una imagen, en el otro caso no. Esa misma onda genera un cierto campo sobre la pupila y no se puede distinguir si este campo se debe a  $\mathcal{A}$  o a  $\mathcal{B}$ .

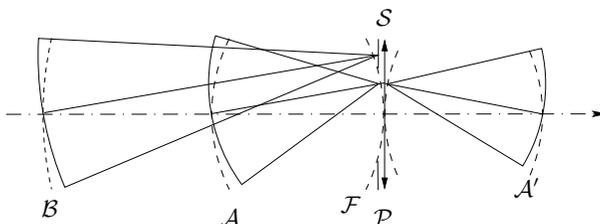


**Figura 7.2.** Una misma frecuencia espacial está resuelta por el sistema  $\mathcal{S}$  (representado como una lente delgada) sobre el objeto  $\mathcal{A}$ , pero no sobre el objeto  $\mathcal{B}$ , aun que en ambos casos le corresponde la misma onda plana.

Examínese ahora la formación de la imagen de un emisor esférico  $\mathcal{A}$  centrado sobre la pupila (de entrada) del objetivo. Su esfera de Fourier

$\mathcal{F}$  está tangente a la pupila. La onda emitida por  $\mathcal{A}$  es la suma de ondas esféricas centradas sobre  $\mathcal{F}$ , cada onda estando asociada con una frecuencia espacial sobre  $\mathcal{A}$ . La onda esférica asociada con la frecuencia espacial  $\mathbf{F}$  se focaliza prácticamente sobre la pupila cuyo papel aparece claramente: si el foco de la onda esférica entra en la pupila, la onda está transmitida y la frecuencia espacial está resuelta. Si no entra en la pupila, la onda no está transmitida por la pupila y la frecuencia espacial no está resuelta.

La paradoja de la teoría clásica se resuelve si se considera una misma frecuencia espacial  $\mathbf{F}$  sobre dos emisores esféricos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  como lo muestra la figura 7.3.



**Figura 7.3.** A la misma frecuencia espacial sobre  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  se asocian dos ondas esféricas. La onda relativa a  $\mathcal{A}$  se focaliza dentro de la pupila y por lo tanto está transmitida. La onda relativa a  $\mathcal{B}$  se focaliza por fuera de la pupila y no está transmitida. No existe la paradoja de la teoría clásica.

### 7.3 Propagación del espectro angular esférico

Sea un emisor  $\mathcal{A}$  (radio de curvatura  $R_A$ ) y sea  $\mathcal{B}$  un receptor (radio  $R_B$ ) a la distancia  $D$  (vértice a vértice). La transferencia de la amplitud del campo de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  se escribe (es la relación (6.5) p. 56)

$$U_B(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{R_B} + \frac{1}{D} \right) s^2 \right] \times \int_{\mathbb{R}^2} \exp \left[ -\frac{i\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{D} - \frac{1}{R_A} \right) r^2 \right] \exp \left[ \frac{2i\pi}{\lambda D} \mathbf{r} \cdot \mathbf{s} \right] U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (7.3)$$

Considérense dos casos particulares:

1. Si  $R_A = D = -R_B$ , la esfera  $\mathcal{B}$  es la esfera de Fourier  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{A}$  (difracción de Fraunhofer) y la relación (7.3) se reduce a

$$U_B(\mathbf{s}) = U_F(\mathbf{s}) = \frac{i}{\lambda R_A} \hat{U}_A \left( \frac{\mathbf{s}}{\lambda D} \right), \quad (7.4)$$

de tal modo que el espectro angular esférico sobre  $\mathcal{F}$  es

$$W_F(\Phi) = \frac{1}{\lambda^2} \widehat{U}_F \left( \frac{\Phi}{\lambda} \right) = \frac{iR_A}{\lambda} \widehat{W}_A \left( \frac{R_A \Phi}{\lambda} \right). \quad (7.5)$$

La relación (7.5) muestra que la propagación del espectro angular se efectúa por una transformación de Fourier, tal como la de la amplitud del campo.

2. Si  $D = R_A - R_B$ , las esferas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son concéntricas. Sea  $\kappa = R_B/R_A$  y sea  $h_{BA}$  la función definida por

$$h_{BA}(\mathbf{r}) = \frac{i}{\lambda D} \exp \left[ -\frac{i\pi\kappa}{\lambda D} r^2 \right]. \quad (7.6)$$

La relación (7.3) se escribe

$$U_B(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA} \left( \frac{\mathbf{s}}{\kappa} - \mathbf{r} \right) U_A(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = h_{BA} * U_A \left( \frac{\mathbf{s}}{\kappa} \right). \quad (7.7)$$

La transferencia del campo de una esfera  $\mathcal{A}$  a una esfera concéntrica  $\mathcal{B}$  es un filtrado lineal (un caso particular se encuentra cuando  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son dos planos paralelos, véase el párrafo 5.6).

De las relaciones (7.6) y (7.7) se deduce

$$\widehat{U}_B(\mathbf{F}) = \kappa \exp[i\pi\kappa\lambda D F^2] \widehat{U}_A(\kappa\mathbf{F}), \quad (7.8)$$

y luego

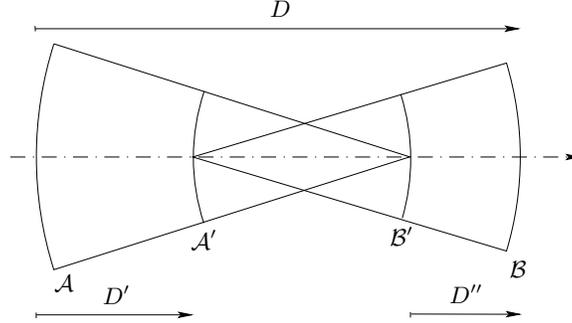
$$W_B(\Phi) = \kappa \exp \left[ \frac{i\pi\kappa D \Phi^2}{\lambda} \right] W_A(\kappa\Phi). \quad (7.9)$$

Se considera de nuevo la transferencia del campo de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  (a la distancia  $D$ ) en la forma general. Sea  $\mathcal{A}'$  la esfera que pasa por el centro de curvatura de  $\mathcal{B}$  y que está concéntrica con  $\mathcal{A}$  (fig. 7.4). Sea también la esfera  $\mathcal{B}'$  que pasa por el centro de curvatura de  $\mathcal{A}$  y que está concéntrica con  $\mathcal{B}$ . Las esferas  $\mathcal{A}'$  y  $\mathcal{B}'$  son esferas de Fourier la una de la otra. Finalmente la transferencia del campo de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  es la composición de los tres operadores siguientes (fig. 7.4):

1. Un filtrado lineal de  $\mathcal{A}$  hacia  $\mathcal{A}'$ .
2. Una transformación de Fourier óptica de  $\mathcal{A}'$  hacia  $\mathcal{B}'$ .
3. Un filtrado lineal de  $\mathcal{B}'$  hacia  $\mathcal{B}$ .

Matemáticamente, se aplican esos tres operadores al espectro angular esférico en la forma de las relaciones (7.5) y (7.9). Para el cálculo explícito se nota que el radio de curvatura de  $\mathcal{A}'$  es  $R_{A'} = R_A - D - R_B$ ; el de  $\mathcal{B}'$  es  $R_{B'} = -R_{A'}$ . La distancia de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{A}'$  es  $D' = D - R_B$  (fig. 7.4); la distancia de  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$  es  $D'' = D - R_A$ . Luego se introducen

$$\kappa' = \frac{R_{A'}}{R_A} = 1 - \frac{D}{R_A} - \frac{R_B}{R_A}, \quad (7.10)$$



**Figura 7.4.** La transferencia del campo de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  se descompone en un filtrado lineal de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{A}'$ ; una transformación de Fourier óptica de  $\mathcal{A}'$  a  $\mathcal{B}'$ ; y otro filtrado lineal de  $\mathcal{B}'$  a  $\mathcal{B}$ .

$$\kappa'' = \frac{R_B}{R_{B'}} = \frac{1}{1 + \frac{D}{R_B} - \frac{R_A}{R_B}}. \quad (7.11)$$

La composición de los tres operadores anteriores lleva a

$$W_B(\Phi) = \frac{iR_A\kappa''}{\lambda\kappa'} \exp\left[\frac{i\pi\kappa''D''\Phi^2}{\lambda}\right] \times \exp\left[\frac{i\pi D'\Phi'^2}{\lambda\kappa'}\right] \exp\left[\frac{2i\pi\kappa''R_{A'}}{\lambda\kappa'} \Phi \cdot \Phi'\right] W_A(\Phi') d\Phi'. \quad (7.12)$$

Formalmente, la relación (7.12) es idéntica a la relación (7.3): términos de fase cuadrática ante y dentro la integral; núcleo de Fourier. La transferencia del espectro angular se expresa en una forma similar a la de la amplitud del campo. Eso distingue el espectro angular esférico del espectro angular plano. En consecuencia, los mismos métodos que sirven para expresar la transferencia de la amplitud del campo se pueden aplicar para expresar la transferencia del espectro angular esférico (en particular el método de la transformación de Fourier fraccionaria [4]).

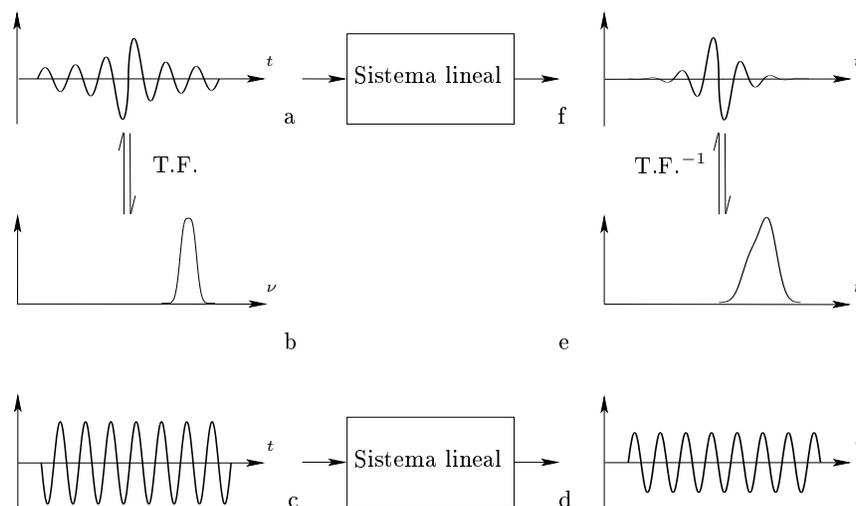


## 8. Ondas policromáticas

### 8.1 Método de estudio general

En los capítulos anteriores no se tomaron en cuenta las variaciones temporales de la luz. Se consideraban ondas monocromáticas cuya dependencia temporal era de la forma  $\exp 2i\pi\nu t$  y no se escribía.

El análisis de Fourier permite determinar el comportamiento de un sistema lineal frente a ondas policromáticas, cuando se conoce su comportamiento para cada frecuencia del espectro luminoso. La figura 8.1 presenta



**Figura 8.1.** Gracias a la transformación de Fourier, el efecto de un sistema lineal sobre una onda policromática se deduce del comportamiento del sistema para ondas monocromáticas. (a) Onda policromática incidente; (b) Espectro de la onda incidente (T. F.: transformación de Fourier); (c) Una componente senoidal de la onda incidente; (d) Respuesta del sistema lineal a la componente senoidal; (e) La reconstrucción del espectro transmitido por el sistema lineal se hace componente por componente; (f) Se obtiene la onda transmitida por el sistema por intermedio de una transformación de Fourier inversa (T.F.<sup>-1</sup>).

un esquema del proceso que se emplea para calcular la respuesta de un sistema lineal a una onda policromática.

Se formaliza el proceso anterior de la manera siguiente. Sea  $E(t)$  la representación temporal de la señal de entrada del sistema lineal (fig. 8.1-a) y sea  $e(\nu)$  su representación frecuencial (fig. 8.1-b), es decir

$$E(t) \rightleftharpoons e(\nu). \quad (8.1)$$

La representación frecuencial  $e(\nu)$  se llama también la *componente espectral* de la señal.

Si la señal de entrada es armónica (monocromática), el sistema lineal puede atenuarla, o introducir un desfase, pero sin cambiar su frecuencia (fig. 8.1-c y 8.1-d). La relación entre la componente espectral de la entrada y la componente espectral  $s(\nu)$  de la señal de salida (fig. 8.1-e) se escribe

$$s(\nu) = e(\nu) a(\nu) e^{-i\varphi(\nu)}, \quad (8.2)$$

donde  $a(\nu)$  representa la atenuación a la frecuencia  $\nu$  y  $\varphi(\nu)$  el desfase. La función  $g$  definida por  $g(\nu) = a(\nu) e^{-i\varphi(\nu)}$  es la función de transferencia del sistema lineal.

La representación temporal de la señal de salida, que corresponde a la entrada  $E$  de componente espectral  $e$ , se obtiene por intermedio de una transformación de Fourier inversa, en la forma (fig. 8.1-f)

$$S(t) = \int_{\mathbb{R}} s(\nu) e^{2i\pi\nu t} d\nu = \int_{\mathbb{R}} e(\nu) a(\nu) e^{-i\varphi(\nu)} e^{2i\pi\nu t} d\nu. \quad (8.3)$$

## 8.2 Efecto temporal de la difracción

Se aplica el método de la sección anterior al estudio del efecto de la difracción sobre ondas policromáticas.

**La difracción como filtro lineal temporal.** Sea un emisor  $\mathcal{A}$  (radio de curvatura  $R_A$ ) y un receptor  $\mathcal{B}$  (radio  $R_B$ ) a la distancia  $D$  (véase la fig. 6.4 p. 55). Se supone que el campo sobre  $\mathcal{A}$  es policromático; su representación temporal en el punto  $\mathbf{r}$  de  $\mathcal{A}$  se escribe  $E_A(\mathbf{r}, t)$ . La componente espectral del campo es  $e_A(\mathbf{r}, \nu)$  y se tiene

$$E_A(\mathbf{r}, t) \rightleftharpoons e_A(\mathbf{r}, \nu), \quad (8.4)$$

donde la transformación de Fourier es “temporal”.

La componente espectral  $e_A(\mathbf{r}, \nu)$  no es más sino lo que se denotaba  $U_A(\mathbf{r})$  en los capítulos 5 y 6 y se llamaba la amplitud del campo. En realidad, la función  $U_A$  representaba el campo de una onda monocromática y por tanto no era necesario escribir explícitamente la frecuencia cuyo valor era fijo. La situación es distinta para un campo policromático: la frecuencia se vuelve

una variable, y por esta razón adaptamos las notaciones, cambiando  $U_A(\mathbf{r})$  por  $e_A(\mathbf{r}, \nu)$ . Queda claro que las propiedades de la amplitud  $U_A$  son las mismas propiedades de la componente espectral  $e_A$ , de tal modo que se conoce como se propaga la componente espectral de un campo policromático en las situaciones estudiadas en los capítulos 5 y 6 donde el modelo se desarrolló para la amplitud del campo. Luego se deduce como se propaga el campo en su forma temporal si se aplica el método de la sección 8.1.

La propagación del campo de  $\mathcal{A}$  a  $\mathcal{B}$  se expresa por la relación (6.5) que se escribe<sup>1</sup>

$$e_B(\mathbf{s}, \nu) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) e_A(\mathbf{r}, \nu) d\mathbf{r}, \quad (8.5)$$

donde la función  $h_{BA}$  es tal que<sup>2</sup>

$$h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) = \frac{i\nu}{cD} \exp \left[ -\frac{i\pi}{c} \left( \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{D} + \frac{s^2}{R_B} - \frac{r^2}{R_A} \right) \right] \\ \times \exp \left[ -\frac{2i\pi\nu D}{c} \right]. \quad (8.6)$$

Sea  $H_{BA}$  la función tal que

$$H_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) \equiv h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu). \quad (8.7)$$

Se aplica una transformación de Fourier temporal inversa a los dos miembros de la relación (8.5) y se obtiene

$$E_B(\mathbf{s}, t) = \int_{\mathbb{R}} d\nu e^{2i\pi\nu t} \int_{\mathbb{R}^2} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) e_A(\mathbf{r}, \nu) d\mathbf{r} \\ = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} \int_{\mathbb{R}} dt' E_A(\mathbf{r}, t') \int_{\mathbb{R}} h_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \nu) e^{2i\pi\nu(t-t')} d\nu \\ = \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{r} \int_{\mathbb{R}} H_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t-t') E_A(\mathbf{r}, t') dt', \quad (8.8)$$

La relación (8.8) se escribe también

$$E_B(\mathbf{s}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} [H_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t') * E_A(\mathbf{r}, t')](t) d\mathbf{r}, \quad (8.9)$$

donde el producto de convolución es temporal. La relación (8.9) muestra que el efecto de la difracción sobre las ondas policromáticas se traduce por una convolución: la difracción es un filtro lineal temporal. Se explicó en el capítulo 5 que la difracción era un filtro lineal espacial. Finalmente la difracción es un filtro lineal espacio-temporal.

<sup>1</sup> Se utiliza la frecuencia  $\nu$  como parámetro en lugar de la longitud de onda  $\lambda$ . Se supone que el medio de propagación es el vacío, de tal modo que  $\lambda\nu = c$ .

<sup>2</sup> En la relación (8.6) se escribe el término de fase que se despreció en la relación (6.3) de acuerdo con la nota de pie de pagina 2 p. 54.

**Ejemplo explícito.** La expresión explícita<sup>3</sup> de  $H_{BA}$  se deduce de la relación (8.6) y es

$$H_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi c D} \delta' \left[ t - \frac{1}{c} \left( D + \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{2D} + \frac{s^2}{2R_B} - \frac{r^2}{2R_A} \right) \right], \quad (8.10)$$

donde  $\delta'$  es la derivada de la distribución de Dirac.

Si  $D(\mathbf{s}, \mathbf{r})$  es la distancia del punto  $\mathbf{r}$  de  $\mathcal{A}$  al punto  $\mathbf{s}$  de  $\mathcal{B}$ , se muestra la siguiente relación, válida al segundo orden (aproximación metaxial) [4],

$$D(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = D + \frac{\|\mathbf{s} - \mathbf{r}\|^2}{2D} + \frac{s^2}{2R_B} - \frac{r^2}{2R_A}, \quad (8.11)$$

y la relación (8.10) se escribe

$$H_{BA}(\mathbf{s}, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi c D} \delta' \left[ t - \frac{D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{c} \right]. \quad (8.12)$$

Finalmente, la forma explícita de la relación (8.9) es<sup>4</sup>

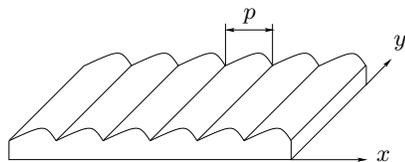
$$E_B(\mathbf{s}, t) = \frac{1}{2\pi c D} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\partial E_A}{\partial t'} \left( \mathbf{r}, t - \frac{D(\mathbf{s}, \mathbf{r})}{c} \right) d\mathbf{r}. \quad (8.13)$$

La difracción se traduce por un retraso y una derivación temporal (aparte de la integración espacial sobre el emisor).

### 8.3 Red de difracción. Análisis espectral de la luz

Una red de difracción es una estructura periódica que transmite o refleja la luz. Se denota  $p$  el paso (o periodo fundamental) de la red (fig. 8.2).

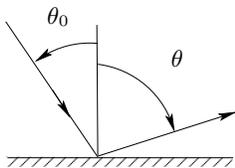
La red –si es por reflexión– se describe por la función de reflexión  $r$  tal que



**Figura 8.2.** Red de difracción por reflexión.

<sup>3</sup> Para el resto de esta sección se necesita conocer y saber manejar la derivada de la distribución de Dirac. Sin embargo, leer esta sección no es indispensable para seguir con las siguientes secciones.

<sup>4</sup> Se denota  $\partial E_A / \partial t'$  la derivada parcial de  $E_A$  con respecto a la variable temporal.



**Figura 8.3.** Definición del ángulo de incidencia  $\theta_0$  y del ángulo de difracción  $\theta$ . (En la figura,  $\theta_0 > 0$  y  $\theta < 0$ .)

$$r(x, y) = \frac{1}{p} m * \sqcup\sqcup_p(x) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} m * \delta_{qp}(x), \quad (8.14)$$

donde  $m$  es el motivo de la red, es decir, su perfil definido sobre un periodo.

Se ilumina la red con una onda monocromática cuya dirección de propagación hace un ángulo  $\theta_0$  con la normal a la red (fig. 8.3) y cuya amplitud se escribe

$$U_i(x, y) = U_0 \exp \left[ \frac{2i\pi x \operatorname{sen} \theta_0}{\lambda} \right], \quad (8.15)$$

donde  $U_0$  es una constante dimensional. La amplitud de la onda emergente de la red es

$$U_e(x, y) = U_0 r(x, y) \exp \left[ \frac{2i\pi x \operatorname{sen} \theta}{\lambda} \right], \quad (8.16)$$

cuyo espectro angular es

$$V(\alpha, \beta) = \frac{U_0}{p} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \widehat{m} \left( -\operatorname{sen} \theta_0 + \frac{q\lambda}{p} \right) \delta \left( \alpha + \operatorname{sen} \theta_0 - \frac{q\lambda}{p} \right) \delta(\beta). \quad (8.17)$$

Luego, se nota que  $\alpha = \operatorname{sen} \theta$  (fig. 8.3)<sup>5</sup> de tal modo que hay interferencias constructivas en la dirección  $\theta$  tal que

$$\operatorname{sen} \theta + \operatorname{sen} \theta_0 = \frac{q\lambda}{p}, \quad (8.18)$$

donde  $q$  es un número entero ( $q \in \mathbb{Z}$ ).

La relación (8.18) se conoce como la fórmula de las redes (fórmula de Bragg).

Para una incidencia dada ( $\theta_0$ ), a cada longitud de onda corresponden direcciones de difracción bien definidas. Cada dirección se caracteriza por un ángulo  $\theta_q$  igual al valor de  $\theta$  que satisface la relación (8.18) por un valor de  $q$  dado.

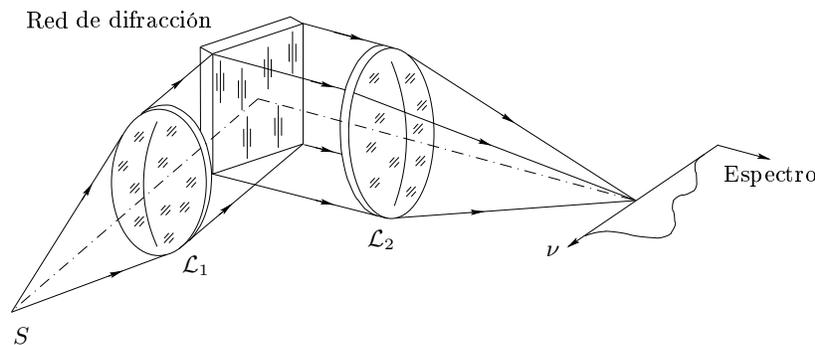
Si se ilumina la red con una onda policromática, a cada valor de  $q$  (un número entero) corresponde un conjunto de direcciones de difracción, cada

<sup>5</sup> La relación  $\alpha = \operatorname{sen} \theta$  no es más que la relación (5.12) adaptada a la situación siguiente: la normal a la red es la dirección  $z$ ; se elige la dirección  $y$  de tal manera que  $\beta = 0$ .

dirección estando asociada con una longitud de onda (se considera  $\theta_q$  como una función de  $\lambda$ ). Este conjunto se llama espectro de orden  $q$ . En este sentido, la red de difracción es un analizador espectral de la luz incidente.

La energía de la onda incidente se reparte sobre todos los espectros difractados por la red. Es ventajoso obtener un solo orden de difracción que resulta más luminoso, por ser único. Para eso se adapta el perfil de la red (red *échelette*).

La figura 8.4 muestra el esquema de un montaje que permite obtener el espectro de una fuente luminosa (se considera un solo orden de difracción). Se puede remplazar la red de difracción por un prisma (que funciona por transmisión).



**Figura 8.4.** Análisis espectral de una fuente policromática  $S$  por una red de difracción. El objetivo  $\mathcal{L}_1$  sirve de colimador y el objetivo  $\mathcal{L}_2$  permite observar el espectro a distancia finita.

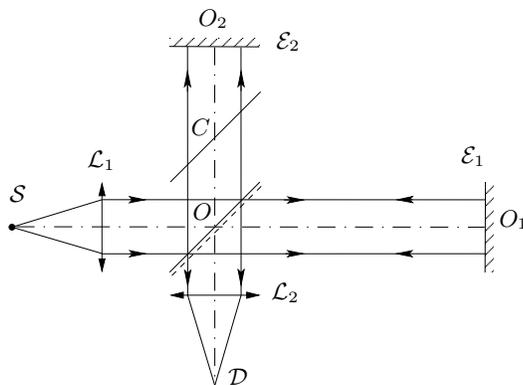
## 8.4 Espectroscopia por transformación de Fourier

Se presenta otro método de análisis espectral de la luz emitida por una fuente.

**Análisis del método.** La figura 8.5 muestra el esquema de un interferómetro de Michelson: se compone de una fuente luminosa  $S$ , de una lámina separadora colocada en  $O$ , de una lámina de compensación en  $C$  y de dos espejos  $\mathcal{E}_1$  y  $\mathcal{E}_2$  en  $O_1$  y  $O_2$ . El objetivo  $\mathcal{L}_1$  es colimador para la fuente  $S$  y  $\mathcal{L}_2$  focaliza la luz sobre el detector  $\mathcal{D}$ . El espejo  $\mathcal{E}_1$  es móvil, se puede alejar de  $O$ .

El montaje permite analizar el espectro de la fuente de luz  $S$ , de la manera siguiente. Se recuerda que el interferómetro realiza la condición de igualdad de los caminos ópticos cuando las distancias  $OE_1$  y  $OE_2$  son iguales.

Hay interferencias entre la vibración luminosa procedente de  $\mathcal{E}_1$  y la procedente de  $\mathcal{E}_2$ . Se supone primero que  $S$  es una fuente monocromática



**Figura 8.5.** Interferómetro de Michelson para la espectroscopia por transformación de Fourier.

de frecuencia  $\nu$  (longitud de onda  $\lambda$ ). Si  $\Delta = OO_1 - OO_2$ , la diferencia de recorrido entre las dos vibraciones que llegan sobre el detector es  $2\Delta$  y lleva a una diferencia de fase

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} 2\Delta = \frac{4\pi\nu\Delta}{c}, \tag{8.19}$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. La iluminación en  $\mathcal{D}$  es una función de  $\Delta$  y tiene la forma<sup>6</sup>

$$I(\Delta) = I_0 \left( 1 + \cos \frac{4\pi\nu\Delta}{c} \right), \tag{8.20}$$

donde  $I_0$  es una constante, proporcional a la luminancia  $L_0$  de la fuente. Si  $I_0 = aL_0$  se tiene

$$I(\Delta) = aL_0 + aL_0 \cos \frac{4\pi\nu\Delta}{c}, \tag{8.21}$$

Se desplaza el espejo  $\mathcal{E}_1$ , alejandolo de  $O$ , aumentandose la distancia  $OO_1$ . Si el movimiento es uniforme,  $\Delta$  es una función lineal del tiempo y con un origen del tiempo adecuadamente elegido se tiene  $\Delta = Vt$  donde  $V$  es la velocidad de translación del espejo. Finalmente, la iluminación detectada por el detector  $\mathcal{D}$  es una función del tiempo de la forma<sup>7</sup>

$$I(t, \nu) = aL_0 + aL_0 \cos \frac{4\pi\nu Vt}{c}, \tag{8.22}$$

<sup>6</sup> No se toma en cuenta una diferencia de fase introducida por la reflexión sobre la lámina separadora. Si la separadora es dieléctrica, esa diferencia de fase vale  $\pi$ , de tal modo que el fenómeno de interferencias obtenido a la diferencia de camino óptico nula es de "centro negro" (las vibraciones estan en contrafase).

<sup>7</sup> Utilizamos la misma letra  $I$  para denominar la iluminación, aunque cambiamos de variable e introducimos explícitamente la frecuencia.

y contiene una parte constante y una parte modulada en forma de una función senoidal.

Para simplificar las notaciones en lugar de  $t$  se toma a

$$\tau = \frac{2Vt}{c}, \quad (8.23)$$

como parámetro, de tal manera que la iluminación detectada se escribe<sup>8</sup>

$$I(\tau, \nu) = aL_0 + aL_0 \cos 2\pi\nu\tau. \quad (8.24)$$

La iluminación  $I(\tau, \nu)$  representa la excitación del detector cuya respuesta es generalmente una corriente eléctrica. Se supone que esa corriente es proporcional a la iluminación detectada, de tal manera que se puede seguir el análisis tomando la iluminación como cantidad de estudio.

Se supone ahora que la fuente  $\mathcal{S}$  es policromática de luminancia espectral<sup>9</sup>  $L(\nu)$ . La señal detectada por  $D$  se escribe

$$S(\tau) = \int_{\nu_1}^{\nu_2} I(\tau, \nu) d\nu, \quad (8.25)$$

donde  $[\nu_1, \nu_2]$  es el soporte del espectro de la fuente  $S$  (o por lo menos la parte a la cual el detector es sensible). Como el espectro es nulo por fuera de este intervalo, se tiene

$$S(\tau) = \int_0^{+\infty} I(\tau, \nu) d\nu = a \int_0^{+\infty} L(\nu) d\nu + a \int_0^{+\infty} L(\nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu. \quad (8.26)$$

La señal contiene una parte constante, proporcional a la luminancia total de la fuente. Para el análisis espectral, la parte interesante es la parte modulada que se escribe

$$S_m(\tau) = a \int_0^{+\infty} L(\nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu. \quad (8.27)$$

Se trata de invertir la relación (8.27) para obtener  $L(\nu)$  a partir de la señal detectada por el detector.

**Análisis espectral de una fuente luminosa.** Se nota que la función  $S_m$  es una función real (es proporcional a una iluminación, cantidad real) y par: si a partir de la posición de igualdad de los caminos ópticos se acerca el espejo  $\mathcal{E}_1$  a la lamina separadora, se cambia  $\Delta$  en  $-\Delta$  sin que cambie la iluminación en el plano del detector.

<sup>8</sup> Es la costumbre en espectroscopia utilizar el número de onda  $\sigma = 1/\lambda$  en lugar de la frecuencia  $\nu$  como parámetro. Sin embargo utilizaremos la frecuencia  $\nu$ , la cual es proporcional a  $\sigma$ .

<sup>9</sup> La luminancia espectral de la fuente es su luminancia en el intervalo  $[\nu, \nu + d\nu]$ .

La transformada de Fourier de una función real y par es una función real y par (véase la sección 1.4). Se deduce que  $\widehat{S}_m$  es una función real y par y luego, por transformación de Fourier inversa, se obtiene

$$S_m(\tau) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{S}_m(\nu) e^{2i\pi\nu\tau} d\nu = 2 \int_0^{+\infty} \widehat{S}_m(\nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu. \quad (8.28)$$

De la comparación de las relaciones (8.27) y (8.28) resulta

$$L(\nu) = \frac{2}{a} \widehat{S}_m(\nu). \quad (8.29)$$

La luminancia espectral de la fuente es proporcional a la transformada de Fourier de la parte modulada de la señal detectada a la salida del interferómetro.

El proceso del análisis espectral de una fuente luminosa por transformación de Fourier es el siguiente:

1. Registro de la parte modulada  $s_m$  de la señal dada por el detector, correspondiente a un desplazamiento continuo del espejo  $\mathcal{E}_1$ . El espejo se aleja de la lamina separadora;
2. Numerización de  $s_m$ ;
3. Hacer simétrica la señal anterior para obtener una señal par. Se define  $S_m$  por

$$S_m(\tau) = s_m(\tau), \quad \text{si } \tau \geq 0, \quad (8.30)$$

$$S_m(\tau) = s_m(-\tau), \quad \text{si } \tau < 0; \quad (8.31)$$

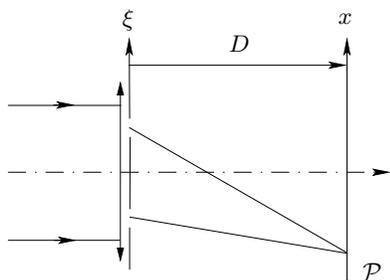
4. Cálculo de la transformada de Fourier de  $S_m$ ;
5. La luminancia espectral de la fuente es la parte de la función  $\widehat{S}_m$  que tiene soporte positivo ( $\nu > 0$ ).

**Nota 8.4.1** La relación (8.27) muestra que  $S_m$  y  $\widehat{S}_m$  son transformadas en coseno la una de la otra (véase la nota 1.4.1 p. 11). Se puede decir que la señal detectada según el método de la espectroscopia por transformación de Fourier es (proporcional a) la transformada en coseno de la luminancia de la fuente.

## 8.5 Espectros acanalados

**Ejemplo del interferómetro de Young.** Se considera el interferómetro de Young compuesto por dos agujeros distante  $\ell$ , o más precisamente un montaje de difracción de Fraunhofer por dos agujeros<sup>10</sup> (fig. 8.6).

<sup>10</sup> El análisis de esta sección se fundamenta sobre el siguiente artículo: C. Froelhy, A. Lacourt, J.-Ch. Viénot, "Notions de réponse impulsionnelle et de fonction de transfert temporelles des pupilles optiques, justifications expérimentales et applications", *Nouvelle Revue d'Optique*, 4 (1973) 183–196.



**Figura 8.6.** Difracción por agujeros de Young. La fuente, colimada, no está dibujada.

Se considera primero la fuente monocromática (frecuencia  $\nu$ , longitud de onda  $\lambda$ ). La iluminación en el plano  $\mathcal{P}$  (plano de Fourier) se escribe

$$I(x, y) = I_0 i(x, y), \quad (8.32)$$

donde  $I_0$  es una constante dimensional e

$$i(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 D^2} \cos^2 \frac{\pi \ell x}{\lambda D}. \quad (8.33)$$

Resulta más conveniente utilizar la frecuencia  $\nu$  como parámetro y hacerla aparecer explícitamente en la expresión de la iluminación; por lo tanto se escribe

$$i(x, y, \nu) = \frac{\nu^2}{c^2 D^2} \cos^2 \frac{\pi \ell \nu x}{c D}, \quad (8.34)$$

si se supone que el medio de propagación es el vacío (velocidad de la luz igual a  $c$ ).

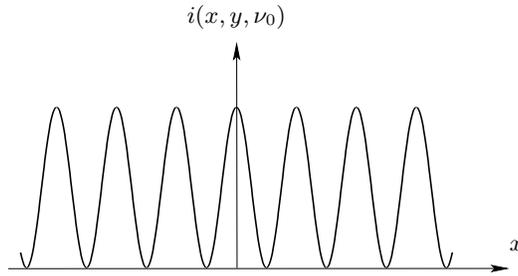
Existen principalmente dos puntos de vista para interpretar  $i(x, y, \nu)$ :

- se fija la frecuencia  $\nu$  (fuente monocromática) y se considera  $i$  como una función de  $(x, y)$ , es decir, se estudia la repartición de la potencia luminosa en el plano  $\mathcal{P}$ . Se estudia el aspecto espacial de la difracción, tal como se explicó en el capítulo 6;
- se fija el punto de observación en el plano  $\mathcal{P}$  y se considera una fuente policromática. Se estudia el espectro difractado. Si  $G_0(\nu)$  es el espectro de la fuente luminosa, el espectro difractado en el punto  $(x_0, y_0)$  del plano de Fourier es

$$G(\nu) = G_0(\nu) i(x_0, y_0, \nu). \quad (8.35)$$

Según el primer punto de vista, se estudia  $i$  como función de  $x$  e  $y$ , para una frecuencia dada  $\nu_0$ , es decir, se estudia la función de  $(x, y)$  definida por

$$i(x, y, \nu_0) = \frac{\nu_0^2}{c^2 D^2} \cos^2 \frac{\pi \ell \nu_0 x}{c D}. \quad (8.36)$$



**Figura 8.7.** Perfil de las franjas de Young obtenidas en luz monocromática.

En el plano  $\mathcal{P}$  se observan franjas de Young, cuyo perfil es una función senoidal como lo muestra la figura 8.7. El paso (periodo) de las franjas es

$$p = \frac{cD}{\ell\nu_0}. \tag{8.37}$$

Según el segundo punto de vista, se elige un punto  $(x_0, y_0)$  del plano  $\mathcal{P}$  y se observa el espectro de la vibración en ese punto, es decir, se considera  $i$  como una función de la frecuencia, en la forma

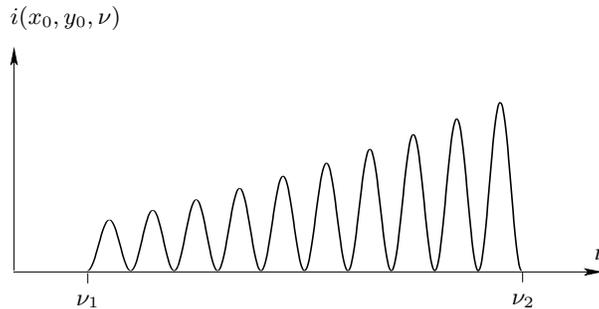
$$i(x_0, y_0, \nu) = \frac{\nu^2}{c^2 D^2} \cos^2 \frac{\pi \ell \nu x_0}{cD}. \tag{8.38}$$

El espectro de la vibración en  $(x_0, y_0)$  es

$$G(\nu) = G_0(\nu) i(x_0, y_0, \nu) = \nu^2 \frac{G_0(\nu)}{c^2 D^2} \cos^2 \frac{\pi \ell \nu x_0}{cD}. \tag{8.39}$$

La función  $i$  se denomina *función espectral* en el punto  $(x_0, y_0)$ .

La figura 8.8 muestra la gráfica de la función espectral en un punto  $(x_0, y_0)$  alejado del eje óptico ( $x_0 \neq 0$ ). Si la fuente que ilumina los agujeros de



**Figura 8.8.** Función espectral obtenida con un interferómetro de Young. Es también el espectro acanalado obtenido a partir de una fuente policromática, de espectro uniforme en el dominio  $[\nu_1, \nu_2]$ .

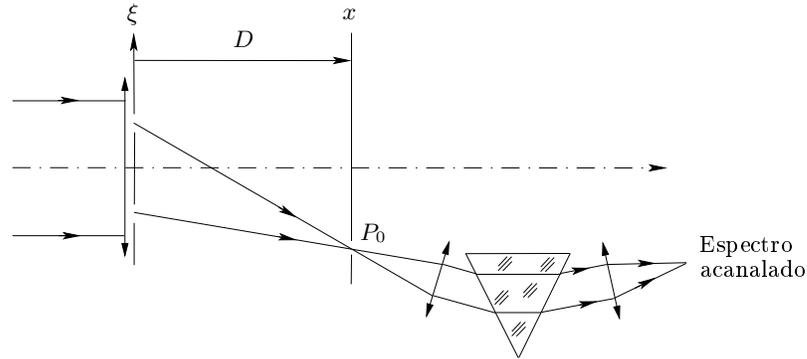
Young tiene un espectro uniforme en el dominio  $[\nu_1, \nu_2]$ , la función espectral representa también el espectro difractado en el punto  $(x_0, y_0)$ .

Las estrías (acanaladuras) del espectro (donde  $i(x_0, y_0, \nu) = 0$ ) se encuentran en las frecuencias  $\nu_q$  tales que

$$\nu_q = \frac{2q + 1}{2} \frac{cD}{\ell x_0}, \quad (8.40)$$

donde  $q$  es un número entero.

La figura 8.9 muestra un montaje de observación de un espectro acanalado obtenido con agujeros de Young. Se utiliza un elemento dispersivo (un prisma como en la figura, o una red de difracción) para analizar el espectro en el punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  del plano de Fourier.



**Figura 8.9.** Observación de un espectro acanalado. La fuente (no representada) se supone policromática. Se coloca en el plano de Fourier una pantalla opaca con un agujero en el punto  $P_0$  donde se estudia el espectro difractado.

**Generalización.** Se considera un fenómeno de difracción de Fraunhofer (distancia  $D$  entre el emisor y su esfera de Fourier) por una abertura de función de transmisión  $t$ . En luz monocromática, la iluminación de la figura de difracción en el plano de Fourier se escribe (es la relación (6.8) p. 57)

$$I(x, y) = I_0 i(x, y), \quad (8.41)$$

donde

$$i(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 D^2} \left| \hat{t} \left( \frac{x}{\lambda D}, \frac{y}{\lambda D} \right) \right|^2, \quad (8.42)$$

Se escribe explícitamente la frecuencia, y se obtiene, para el vacío,

$$i(x, y, \nu) = \frac{\nu^2}{c^2 D^2} \left| \hat{t} \left( \frac{x\nu}{cD}, \frac{y\nu}{cD} \right) \right|^2. \quad (8.43)$$

Para analizar el aspecto espacial de la difracción se supone la fuente monocromática, de frecuencia  $\nu_0$ , y se estudia la función bidimensional de  $x$  e  $y$

$$i(x, y, \nu_0) = \frac{\nu_0^2}{c^2 D^2} \left| \hat{t} \left( \frac{x\nu_0}{cD}, \frac{y\nu_0}{cD} \right) \right|^2. \quad (8.44)$$

El efecto de la difracción sobre el espectro de la fuente, se estudia mediante la función monodimensional de  $\nu$ , dada para el punto  $(x_0, y_0)$  del plano de observación por

$$i(x_0, y_0, \nu) = \frac{\nu^2}{c^2 D^2} \left| \hat{t} \left( \frac{x_0\nu}{cD}, \frac{y_0\nu}{cD} \right) \right|^2. \quad (8.45)$$

Si el espectro de la luz incidente es  $G_0(\nu)$ , el espectro difractado observado en el punto  $(x_0, y_0)$  de la esfera de Fourier del emisor es

$$G(x_0, y_0, \nu) = \frac{\nu^2 G_0(\nu)}{c^2 D^2} \left| \hat{t} \left( \frac{x_0\nu}{cD}, \frac{y_0\nu}{cD} \right) \right|^2. \quad (8.46)$$

El análisis anterior muestra el doble aspecto de la difracción:

- aspecto espacial, analizado para ondas monocromáticas;
- aspecto espectral en luz policromática. Se relaciona este aspecto con la frecuencia “temporal”  $\nu$ , y por tanto se trata del aspecto temporal de la difracción.

Para la observación, se utiliza el montaje de la figura 8.9 donde se reemplaza los agujeros de Young por la abertura que se quiere estudiar.



## 9. Conclusión

La transformación de Fourier, generalización de las series de Fourier a funciones no necesariamente periódicas, constituye la herramienta fundamental del análisis armónico. Su definición y su empleo en cálculos efectivos se relacionan de manera muy estrecha con la noción de producto de convolución y la noción de distribución, las cuales se revelan indispensables en la descripción de los sistemas lineales tal como se encuentran en física o tratamiento de señales.

El análisis armónico permite analizar la estructura de una imagen (considerada como una función de dos variables espaciales) a través de la noción de frecuencia espacial, y lleva por ejemplo al filtrado de imágenes, como se estudió en el capítulo 4 anterior.

La óptica ilustra una parte de la gran variedad de las aplicaciones del análisis de Fourier a la física. La idea fundamental se ubica en la asociación natural que existe entre frecuencias espaciales y ondas planas, de tal modo que el análisis armónico del campo electromagnético sobre un plano o una esfera—que forma una imagen en el sentido ya mencionado—se traduce *ipso facto* en el análisis armónico de una onda electromagnética, como se destacó en el capítulo 5. Se pueden resumir las cosas diciendo que la difracción—propagación de las ondas electromagnéticas opera una transformación de Fourier espacial (bidimensional) y por tanto realiza naturalmente un análisis armónico de la amplitud del campo generado por un emisor radiante. De ahí resultan el análisis de la formación de una imagen por un objetivo o la posibilidad de operaciones de filtrado analógico de imágenes, de gran importancia práctica para la concepción de los instrumentos ópticos o para los métodos de observación (como por ejemplo el contraste de fase)—véase el capítulo 6.

Pero la luz es una vibración espacio-temporal, y el análisis mencionado anteriormente, desarrollado en términos espaciales, se completa por un estudio de las propiedades temporales (o espectrales) de las ondas policromáticas. La difracción tiene un efecto temporal como se mostró en el capítulo 8. Existen también dispositivos o métodos espectroscópicos que permiten analizar el contenido frecuencial de una fuente luminosa; por tanto esos dispositivos realizan un análisis armónico de la luz, esta vez en términos temporales, y su importancia es inmensa a través de numerosas aplicaciones, como por ejem-

plo en astronomía, puesto que la información que nos llega de las estrellas lo hace principalmente a través de las ondas electromagnéticas producidas por esas últimas.

La óptica moderna ofrece una ilustración concreta de las ideas de Fourier<sup>1</sup>, como se trató de mostrar en este libro. Aplicaciones nuevas aparecen, tanto como extensiones teóricas. Se puede mencionar por ejemplo la noción de transformación de Fourier fraccionaria que ya se reveló efectiva tanto en óptica [4] como en tratamiento de señales<sup>2</sup>.

Finalmente, al cumplir sus 200 años, las ideas de Fourier confirman su riqueza conceptual y universal.

---

<sup>1</sup> Se recuerda que Fourier inventó su teoría para resolver la ecuación del calor.

<sup>2</sup> Véase por ejemplo: R. Torres, P. Pellat-Finet, Y. Torres, “Sampling theorem for fractional bandlimited signals: a self-contained proof. Application to digital holography”, *IEEE Signal Processing Letters*, **13** (2006) 676–679.

Anexos  
Transformadas de Fourier



## Transformadas de Fourier en una dimensión

Las transformadas de Fourier siguientes corresponden a

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi\nu t} f(t) dt.$$

La función de Heaviside se denota por  $Y$ , y P.P. denota la integral en valor (o parte) principal. El símbolo  $\Re$  significa parte real.

Función o distribución	Transformada de Fourier
1	$\delta(\nu)$
$\delta(t)$	1
$\delta_{t_0} = \delta(t - t_0)$	$\exp[-2i\pi t_0 \nu]$
$\exp[2i\pi\nu_0 t]$	$\delta(\nu - \nu_0) = \delta_{\nu_0}$
$\delta'(t)$	$2i\pi\nu$
$-2i\pi t$	$\delta'(\nu)$
$\delta^{(j)}(t); j \in \mathbb{N}$	$(2i\pi\nu)^j$
$(-2i\pi t)^j; j \in \mathbb{N}$	$\delta^{(j)}(\nu)$
$\text{rect}_L(t)$	$L \frac{\sin \pi L \nu}{\pi L \nu}$
$\Lambda_L(t)$	$L^2 \left( \frac{\sin \pi L \nu}{\pi L \nu} \right)^2$
$\frac{1}{\ell} \mathbb{1}_{\mathbb{1}} \ell(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\ell)$	$\frac{1}{\ell} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\nu - \frac{n}{\ell}\right) = \mathbb{1}_{\mathbb{1}/\ell}(\nu)$
$Y(t)$	$\frac{1}{2} \delta(\nu) + \text{P.P.} \frac{1}{2i\pi\nu}$
$\frac{1}{2} \delta(t) - \text{P.P.} \frac{1}{2i\pi t}$	$Y(\nu)$
$Y(t) \exp[-\alpha t]; \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha + 2i\pi\nu}$
$\exp[-\alpha t]; \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2\nu^2}$
$\exp[-\pi t^2]$	$\exp[-\pi\nu^2]$
$\exp\left[\frac{i\pi}{\alpha} t^2\right]; \alpha > 0$	$\sqrt{\alpha} \exp\left[\frac{i\pi}{4}\right] \exp[-i\alpha\pi\nu^2]$
$\exp\left[\frac{i\pi}{\alpha} t^2\right]; \alpha < 0$	$\sqrt{ \alpha } \exp\left[-\frac{i\pi}{4}\right] \exp[-i\alpha\pi\nu^2]$
$\exp\left[-\frac{\pi}{\alpha} t^2\right]; \alpha = \rho e^{i\theta}, \Re\{\alpha\} \geq 0$	$\sqrt{\rho} e^{i\theta/2} \exp[-\alpha\pi\nu^2]$

## Transformadas de Fourier en dos dimensiones

Las transformadas de Fourier siguientes corresponden a

$$\widehat{f}(F_x, F_y) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2i\pi(xF_x+yF_y)} f(x, y) dx dy,$$

es decir, con notaciones vectoriales,

$$\widehat{f}(\mathbf{F}) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{2i\pi\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}} f(\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

El símbolo  $\Delta$  representa el laplaciano. La función  $J_0$  es la función de Bessel de primera especie y orden 0 y  $J_1$  denota la función de Bessel de primer especie y orden 1. La función  $\text{circ}_D$  vale 1 en el disco de diámetro  $D$  centrado en  $(0, 0)$ , y vale 0 por fuera de este disco.

Función o distribución	Transformada de Fourier
1	$\delta(\mathbf{F}) = \delta(F_x, F_y)$
$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \delta(x - x_0, y - y_0)$	$\exp[2i\pi\mathbf{r}_0\cdot\mathbf{F}]$
$\exp[-2i\pi\mathbf{r}\cdot\mathbf{F}_0]$	$\delta(\mathbf{F} - \mathbf{F}_0)$
$2i\pi x$	$\frac{\partial}{\partial F_x}\delta(\mathbf{F})$
$\frac{\partial}{\partial x}\delta(\mathbf{r})$	$-2i\pi F_x$
$\Delta\delta(\mathbf{r})$	$-4\pi^2 F^2$
$\text{circ}_D(x, y)$	$\frac{\pi D^2}{2} \frac{J_1(\pi DF)}{\pi DF}$
$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{F}$
$\exp[-\pi r^2]$	$\exp[-\pi F^2]$
$\frac{1}{i\alpha} \exp\left[\frac{i\pi}{\alpha} r^2\right]$	$\exp[-i\alpha\pi F^2]$
$\delta(r - r_0)$	$2\pi r_0 J_0(2\pi r_0 F)$
$\frac{\exp[-ikr]}{r}; k > 0$	$\frac{-2i\pi}{\sqrt{k^2 - 4\pi^2 F^2}}; \text{ para } 2\pi F < k$ $\frac{2i\pi}{\sqrt{4\pi^2 F^2 - k^2}}; \text{ para } 2\pi F > k$

## Bibliografía

1. Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier optics*, Mc Graw-Hill, Nueva York, 1968. Nueva edición 1996.
2. Eugene Hecht, Alfred Zajac, *Óptica*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1986.
3. Athanasios Papoulis, *Systems and transforms with applications in optics*, McGraw-Hill, Nueva York, 1968.
4. Pierre Pellat-Finet, *Lecciones de óptica de Fourier*, UIS, Bucaramanga, 2004.
5. Laurent Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, 2<sup>a</sup> ed., Hermann, París, 1965. (Traducido al Inglés: *Mathematics for the physical sciences*, Addison-Wesley, Reading, 1966.)

## Comentarios

La teoría de las distribuciones y de la transformación de Fourier está expuesta en forma rigurosa y accesible a físicos en el libro de Schwartz [5] (el inventor de la teoría).

La transformación de Fourier ocupa una parte importante del libro de Papoulis [3], un clásico, donde la óptica se presenta en el lenguaje de la teoría de señales y sistemas.

El libro de Hecht y Zajac [2] ilustra las series de Fourier de manera muy concreta. Se encuentran en este libro ilustraciones particularmente didácticas de muchos fenómenos ópticos (en los cuales unos de difracción).

*Introducción to Fourier Optics* [1] es una referencia sobre el tema. Incluye una introducción a la distribución de Dirac y a la teoría (escalar) de la difracción. *Lecciones de óptica de Fourier* [4] expone la teoría de la difracción metaxial e incluye los desarrollos recientes de la óptica de Fourier fraccionaria.



## Índice de materias

- Amplitud
  - geométrica, 16
  - luminosa, 15
- Armónicos, 4, 7
- Aumento transversal, 15, 16, 58, 59, 63
  
- Coefficientes de Fourier, 3
- Componente espectral, 78
- Contraste de fase, 69
- Coordenadas sobre un casquete esférico, 53
- Coseno director, 46
  
- Derivada
  - de la distribución de Dirac, 31, 80
  - de la función de Heaviside, 31
- Detector cuadrático, 57
- Difracción
  - como filtro lineal
    - espacial, 51
    - espacio-temporal, 79
    - temporal, 78
  - de Fraunhofer, 54
  - de Fresnel, 55
- Distorsión, 22
- Doble conjugación, 58
  
- Ecuación de Helmholtz, 50
- Emisor
  - esférico, 53
  - plano, 59
- Esfera
  - de Fourier, 54, 71
  - imagen, 58, 63
- Espectro
  - angular, 51
  - angular esférico, 71
  - de orden  $q$ , 82
- Estrioscopia, 64, 67
  
- Filtrado
  - de las frecuencias espaciales, 60, 61, 64, 65
  - lineal, 74, 75
- Filtro lineal, 30, 51, 60
  - espacial, 60
  - inverso, 67
  - pasabajo, 64
  - pasabajo, 60, 65
  - pasabanda, 60
  - temporal, 78
- Fórmula
  - de Bragg, 81
  - sumatoria de Poisson, 34
- Frecuencia
  - angular, 45, 46, 71
  - de corte, 50
  - espacial
    - amplitud asociada (con una), 38
    - aspecto vectorial (de una), 39
    - dimensión (de una), 37
    - dirección de propagación asociada (con una), 45
    - y onda plana, 44
    - vibración asociada, véase amplitud asociada
- Función
  - espectral, 87
  - de Gauss, 13, 27
  - de Heaviside, 31, 95
  - muestreada, 35
  - periódica y peinilla de Dirac, 32
  - pupila, 59
  - rectángulo, 12, 25, 26
  - simetrizada, 10
  - de transferencia, 22, 30, 51, 78
  - triángulo, 20
- Iluminación, 57
- Imagen
  - coherente, 58, 59
  - física, 17

- geométrica, 16, 58
- paraxial, 58
- Impulso de Dirac, 22, 30
- Intensidad vibratoria, 57
- Interferómetro
  - de Michelson, 82
  - de Young, 85
  
- Laplaciano, 50, 66, 96
  
- Manchita de difracción, 16
- Microscopía en campo cercano, 50
  
- Notaciones vectoriales, 16
- Número de líneas por milímetro, 37
  
- Oído humano, 7
- Onda
  - esférica, 71
  - evanescente, 50
- Óptica
  - geométrica paraxial, 15, 53
  - metaxial, 53
  
- Par de Fourier, 9
- Periodo espacial, 38
- Plano
  - de Fourier, 61, 86
  - de onda, 44
- Principio de Huygens-Fresnel, 43, 45
- Producto de convolución, 18, 19, 22
- Producto escalar
  - euclidiano, 10
  - pseudo-euclidiano, 10, 37
- Pupila, 59, 72
  
- Receptor esférico, 53
- Reconstrucción de una imagen, 41
- Red
  - de difracción, 80-82
  
- *échelette*, 82
- Relación
  - de Parseval, 12
  - de Parseval-Plancherel, 11
- Respuesta
  - de impulso, 22, 60
  - percusional, 22, 30
  
- Simetría hermitiana, 11
- Sistema
  - centrado, 59
  - lineal, 21, 77
  - temporal, 22
  
- Telefonía, 7
- Teoría
  - de las distribuciones, 25
  - escalar, 43
- Transformación de Fourier
  - en dimensión  $d$ , 9
  - directa, 9
  - espacial, 37
  - inversa, 9, 37, 49, 51
  - óptica, 54, 75
  - temporal, 78
- Transformación en coseno, 11, 85
- Transformada de Fourier
  - de la función de Gauss, 13
  - de una función muestreada, 35
  - de una función periódica, 33
  - de una función real, 11
  - de una función real y par, 11
  - de la función rectángulo, 12
  - de la función triángulo, 21
  - de una peinilla de Dirac, 32
- Transparencia de curvatura, 55
  
- Variable
  - conjugada, 37
  - reducida, 54

*“Es el objetivo de este texto dar una introducción a la transformación de Fourier, la convolución y la distribución de Dirac, en términos más elementales y concretos posibles como antesala al estudio de la óptica de Fourier. No se buscó el rigor matemático y muchos puntos de interés necesitarán complementos importantes para justificarse. Se intentó dar, en forma intuitiva e ilustrativa, el conocimiento mínimo que se necesita para seguir las ideas básicas que funden la óptica de Fourier.*

*A título de ilustración del análisis armónico se dan unos elementos básicos de la óptica de Fourier. [...] Se incluyen también unos resultados recientes, con el fin de mostrar a la óptica de Fourier como un ramo de investigación activo.”*

**Pierre Pellat-Finet** es profesor de la Universidad de Bretaña – Sur (Francia) desde 1997. Fue profesor de la Universidad Industrial de Santander (1977–1979), investigador de la Universidad de Toulon (1980–1990) y profesor de la Escuela Nacional Superior de Telecomunicaciones de Bretaña (1990–1997). Fue agregado de cooperación universitaria y científica de la embajada de Francia en Chile (2010–2014) y luego en Venezuela (2014–2016). Su investigación científica se relaciona con el tratamiento óptico de señales, las telecomunicaciones ópticas, la representación matemática de la luz polarizada, y la óptica de Fourier fraccionaria.

pierre.pellat-net@univ-ubs.fr

**Alberto Patiño Vanegas** es Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad Popular del Cesar, Magister en Física de la Universidad Industrial de Santander y Doctor en Ciencias de la Universidad de Bretaña–Sur (Francia). Es profesor de tiempo completo de la Universidad Tecnológica de Bolívar y pertenece al grupo de investigación en Física Aplicada y Procesamiento de Imágenes y Señales (FAPIS). Su línea de investigación está principalmente en el campo de la óptica y el tratamiento de imágenes y señales.

albertopavanegas@gmail.com

**Rafael Torres Amaris** es Físico y Doctor en Física. Es profesor de la Escuela de Física de la Universidad Industrial de Santander desde 2008, y actualmente director del grupo de investigación de Óptica y Tratamiento de Señales–UIS. Su trabajo de investigación se centra en el estudio de la polarización de la luz, formación de imágenes y teoría de señales.

rafael.torres@saber.uis.edu.co